I. Signaux et Systèmes

Transformations du signal

Signal renversé : $t \mapsto x(-t)$, $(x[-n])_n$
Signal translaté : $t \mapsto x(t-t_0)$, $(x[n-n_0])_n$ $n_0 > 0 \to$ retardé
Changement d'échelle : $t \mapsto x\left(\frac{t}{a}\right)$, $|a| > 1 \to$ ralenti
Interpolation : $x_{\uparrow N}[n] = x\left[\frac{n}{N}\right]$ si $\frac{n}{N} \in \mathbb{Z}, 0$ sinon, bourrage de zéro
Décimation : $x_{\downarrow N}[n] x[Nn]$, perte de données

Relations : $x_{\uparrow N \downarrow N} = x$, $x_{\downarrow N \uparrow N} = x\ \mathbf{1}_{\uparrow N}$

Fonctions & suites usuelles

Constante unité $\mathbf{1}(t) = 1$, $\mathbf{1}[n] = 1$
Échelon $\operatorname{step}(t) = 1$ ssi* $t > 0$, $\operatorname{step}[n] = 1$ ssi $n \geq 0$
Rampe $\operatorname{ramp}(t) = t \operatorname{step}(t)$, $\operatorname{ramp}[n] = n \operatorname{step}[n]$
Fenêtre rectangulaire $\operatorname{rect}(\theta) = 1$ ssi $t \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\operatorname{rect}_N[n] = 1$ ssi $n \in [\![0, N[\![$
Fenêtre triangulaire $\operatorname{tri}(\theta) = \max(1 - |\theta|, 0)$, $\operatorname{bartlett}_N[n] = \max\left(1 - \frac{2}{N-1}\left|n - \frac{N-1}{2}\right|, 0\right)$
Gaussienne $\operatorname{gauss}(\theta) = \exp\left(-\frac{\theta^2}{2}\right) / \sqrt{2\pi}$
Impulsion de Dirac $\delta(t) = +\infty$ ssi $t = 0$, de Kronecker $\delta[n] = 1$ ssi $n = 0$
Attention : $t\delta(t) = 0$ sans dimension
Peigne de Dirac $Ш(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(\theta - k)$, de Kronecker $\mathbf{1}_{\uparrow N}[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta[n - k/N]$

Sinus cardinal $\operatorname{sinc}(\theta) = \frac{\sin(\pi\theta)}{\pi\theta}$
Noyau de Dirichlet
$\mathrm{D}_N(\theta) = \sin(N\pi\theta) \exp(-\mathrm{j}\pi(N-1)\theta) / \sin(\pi\theta)$
Sinusoïde complexe $A \exp(\mathrm{j}(2\pi f t + \varphi))$,
$A \exp(\mathrm{j}(2\pi\lambda n + \varphi))$ périodique ssi $\lambda \in \mathbb{Q}$
(si $\lambda = p/q \in \mathbb{Q} \cap \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ irréductible, p : période, q : nb. cycles).

Relations :
- $\int_{(-\infty, t]} \operatorname{step} = \operatorname{ramp}$, $\sum_{k<n} \operatorname{step}[k] = \operatorname{ramp}[n]$
- $\int_{(-\infty, t]} \delta = \operatorname{step}$, $\sum_{k<n} \delta[k] = \operatorname{step}[n]$
- $\operatorname{step} = \frac{\mathrm{d} \operatorname{ramp}}{\mathrm{d}t}$, $\operatorname{step}[n] = \operatorname{ramp}[n+1] - \operatorname{ramp}[n]$
- $\delta = \frac{\mathrm{d} \operatorname{step}}{\mathrm{d}t}$, $\delta[n] = \operatorname{step}[n+1] - \operatorname{step}[n]$
- $\mathrm{D}_N(\theta) + \mathrm{D}_N(-\theta) - 1$ est réelle, paire, 1-périodique, d'intégrale 1 (sur sa période), et dont le module est celui de D_{2N-1}.

Convolution

Déf. $(x * y)(t) = \int_{\tau \in \mathbb{R}} x(\tau)\, y(t - \tau)$,
$(x * y)[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k] y[n-k]$
Prop. commutatif, associatif, et de neutre δ.
Convolution avec elem neutre décalé, ça décale

Convolution circulaire (Pour des signaux T/N-périodiques)

Déf. $(x \circledast y)(t) = \int_{\tau \in [0, T]} x(\tau)\, y(t - \tau)$,
$(x \circledast y)[n] = \sum_{k \in [\![0, N[\![} x[k] y[n-k]$
Prop. commutatif, associatif, et de neutre $Ш(t/T)/T$ ou $\mathbf{1}_{\uparrow N}$.
Convolution avec elem neutre décalé, ça décale

Transformée de Laplace

Déf. $\mathscr{L}\ x(s) = \int_{x \in \mathbb{R}} x(t) \exp(-st)$
Pôle en $s_0 \in \mathbb{C}$ ssi $\lim_{s \to s_0} \mathscr{L}\ x(s) = \infty$
Cv sur une bande verticale.
Transf $\mathscr{L}$ non unique, unique sur un Σ
Prop. linéaire, transforme $*$ en $\cdot$
Retard $\mathscr{L}\ y(s) = \exp(-st_0)\ \mathscr{L}\ x(s)$, si $y(t) = x(t - t_0)$
Échelle $\mathscr{L}\ y(s) = \mathscr{L}\ x(as)$, si $y(t) = x\left(\frac{t}{a}\right)\frac{1}{|a|}$
Dérivée $\mathscr{L}\ \dot{x}(s) = s\ \mathscr{L}\ x(s)$
Intégrale $\mathscr{L} \int_{\pm\infty} x(s) = \frac{1}{s}\ \mathscr{L}\ x(s)$

Transformée en Z

Déf. $\mathscr{Z}\ x(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] z^{-n}$
Pôle en $z_0 \in \mathbb{C}$ ssi $\lim_{z \to z_0} \mathscr{Z}\ x(s) = \infty$
Cv sur un anneau centré en 0
Transf $\mathscr{Z}$ non unique, unique sur un Σ
Prop. linéaire, transforme $*$ en $\cdot$
Retard $\mathscr{Z}\ y(z) = z^{-n_0}\ \mathscr{Z}\ x(z)$, si $y[n] = x[n - n_0]$
Interpolation $\mathscr{Z}\ x_{\uparrow N}[n] = \mathscr{Z}\ x(z^N)$

Transformées de Fourier

Déf. $\mathscr{F}_{\mathrm{cc}} x(f) = \int_{t \in \mathbb{R}} x(t) \exp(-\mathrm{j}2\pi f t) = \mathscr{L}\ x(\mathrm{j}2\pi f)$
Inv. $x(t) = \int_{f \in \mathbb{R}} \mathscr{F}_{\mathrm{cc}} x(f) \exp(+\mathrm{j}2\pi f t)$
Prop. linéaire, transforme $\cdot$ en $*$

Déf. $\mathscr{F}_{\mathrm{dc}} x(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] \exp(-j2\pi\lambda n) = \mathscr{Z}\ x\left(e^{\mathrm{j}2\pi\lambda}\right)$
Prop. 1-périodique
Inv. $x[n] = \int_{\pm\frac{1}{2}} \mathscr{F}_{\mathrm{dc}} x(\lambda) \exp(\mathrm{j}2\pi\lambda n)$
Prop. linéaire, transforme $\cdot$ en $\circledast$!

Déf. $\mathscr{F}_{\mathrm{cd}} x[k] = \int_{t \in [0, T]} x(t) \exp\left(-\mathrm{j}2\pi k \frac{t}{T}\right)$

Déf. $\mathscr{F}_{\mathrm{dd}} x[k] = \sum_{n \in [\![0, N[\![} x[n] \exp\left(-j2\pi k \frac{n}{N}\right)$

Énergie $\int_{\mathbb{R}} |x|^2$ ou $\sum_{\mathbb{Z}} |x|^2$

Quelques transformées

- $\mathscr{L}\ \delta = \mathbf{1}$, $\mathscr{Z}\ \delta = \mathbf{1}$
- $\mathscr{F}_{\mathrm{cc}} \operatorname{rect} = \operatorname{sinc}$, $\mathscr{F}_{\mathrm{dc}} \operatorname{rect}_N = \mathrm{D}_N$
- $\mathscr{L} \operatorname{step}(s) = \frac{1}{s}$, $\mathscr{L} \operatorname{ramp}(s) = \frac{1}{s^2}$
- $\mathscr{Z} \operatorname{step}(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$, $\mathscr{Z} \operatorname{ramp}(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$
- $\mathscr{F}_{\mathrm{cc}} \mathbf{1} = \delta$, $\mathscr{F}_{\mathrm{dc}} \mathbf{1} = Ш$
- $\mathscr{F}_{\mathrm{cc}} \sin_{\mathbb{C}, f_0}(f) = \delta(f - f_0)$, $\mathscr{F}_{\mathrm{dc}} \sin_{\mathbb{C}, \lambda_0} = \delta(\lambda - \lambda_0)$
- $\mathscr{F}_{\mathrm{cc}} \mathbf{1}_{\uparrow N}(\lambda) = Ш(N\lambda)$

Échantillage

Échantillon $x_{\mathrm{s}}[n] = x(nT_{\mathrm{s}})$
Critère de Shannon $f_{\mathrm{s}} > 2 f_{\max}$
Théorème de Shannon si critère respecté, alors $\mathscr{F}_{\mathrm{cc}} x(f) = \frac{1}{f_{\mathrm{s}}} \mathscr{F}_{\mathrm{dc}} x_{\mathrm{s}}\left(\frac{f}{f_{\mathrm{s}}}\right)$

Blocage

$x_{\mathrm{zoh}}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (x[n] - x[n-1]) \operatorname{step}(t - nT_{\mathrm{s}})$

Systèmes

- causal : dépend pas du futur (sinon non causal)
- anticausal : dépend pas du passé (sinon non anticausal)
- sans transmission directe : dépend pas du présent (sinon à transmission directe)
- statique/sans mémoire : dépend pas des instants autre que celui du présent (sinon dynamique)

Fonction de transfert d'un système LTI S

Déf. $h = S(\delta)$
Prop. $S(u) = h * u$
Prop. $\mathscr{L}\ y(s) = \mathscr{L}\ h(s) \cdot \mathscr{L}\ u(s)$ /
$\mathscr{Z}\ y(z) = \mathscr{Z}\ h(z) \cdot \mathscr{Z}\ u(z)$

Pôle : $\mathscr{L}\ h(s) = \infty$ / $\mathscr{Z}\ h(z) = \infty$,
Zéro : $\mathscr{L}\ h(s) = 0$ / $\mathscr{Z}\ h(z) = 0$,

- S causal ssi h causal,
- S sans trans. directe ssi $h(0)$ fini / $h[0] = 0$
- S stable ssi h abs. sommable

Réponse harmonique : $\mathscr{F}_{\mathrm{cc}} h(f) = G(f) \exp(j\Phi(f))$ / $\mathscr{F}_{\mathrm{dc}} h(\lambda)$
- G: gain, Φ: phase, $-\frac{\Phi}{2\pi f}$: retard de phase
- $G_{\mathrm{dB}} = 20 \log_{10} \frac{G}{G_{\text{réf}}}$

Translation $t \to t - \tau$, $\exp(-s\tau)$ / $n \to n - d$, z^{-d}
Gain pur $u \to Ku$, K

Éq, Transfert, Rep.Imp.

Intégrateur $\dot{y} = u$, $\frac{1}{s}$, $\operatorname{step}(t)$
1er ordre $\dot{y} + \alpha y = u$, $\frac{1}{s + \alpha}$, $\operatorname{step}(t) e^{-\alpha t}$
Int. multiple $y^{(k)} = u$, $\frac{1}{s^k}$, $t^{k-1} \operatorname{step}(t) / (k-1)!$
Dérivateur $y = \dot{u}$, s, $\dot{\delta}$

Sommateur $y[n+1] - y[n] = u$, $z^{-1} / (1 - z^{-1})$, $\operatorname{step}[n-1]$
1er ordre $y[n+1] - \alpha y[n] = u$, $z^{-1} / (1 - \alpha z^{-1})$, $\operatorname{step}[n-1] \alpha^{n-1}$

Système diff.

$$(S) : \quad b_1 u + b_2 \dot{u} + b_3 \ddot{u} + \cdots = a_1 y + a_2 \dot{y} + a_3 \ddot{y} + \cdots$$

$$\mathscr{L}\ h_S(s) = \frac{b_1 + b_2 s + b_3 s^2 + \cdots}{a_1 + a_2 s + a_3 s^2 + \cdots}$$

Forme canonique : $a_1 = 1$

Réponse impulsionnelle $S(\delta) = h$
Réponse indicielle $S(\operatorname{step}) = h * \operatorname{step}$

Échantillonage – Transfert

On veut $\tilde{h} * \varphi_{\mathrm{s}} = (h * \varphi)_{\mathrm{s}}$

$$\mathscr{Z}\ \tilde{h} = \frac{\mathscr{Z} (h * \varphi)_{\mathrm{s}}(z)}{\mathscr{Z}\ \varphi_z(z)}$$

- Invariance indicielle (méthode ZOH) : $\varphi = \operatorname{step}$
- Invariance impulsionnelle : $\varphi = \delta$

Approximation de l'intégrateur :

$$\frac{\mathscr{Z}\ \hat{y}_{\mathrm{s}}(z)}{\mathscr{Z}\ u_{\mathrm{s}}(z)} = T_{\mathrm{s}} \times \begin{cases} \mathscr{Z}\ (\operatorname{step} - \delta)(z) \text{ rect à gauche} \\ \mathscr{Z} \operatorname{step}\ (z) \text{ rect à droite} \\ \mathscr{Z}\ \left(\operatorname{step} - \frac{\delta}{2}\right)(z) \text{ trapèze} \end{cases}$$

Transformée de Tustin $\mathscr{Z}\ \tilde{h}(z) = \mathscr{L}\ h(B(z))$ où

$$B(\exp(j2\pi\lambda)) = j2 f_{\mathrm{s}} \tan(\pi\lambda)$$

Représentation dans l'espace d'état

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad / \quad y[n] = Cx[n] + Du[n]$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad / \quad x[n+1] = Ax[n] + Bu[n]$$

- A : mat. d'évolution/de transition
- B : mat. de commande
- C : mat. d'observation
- D : mat. de transmission directe

Espace d'état $\leftrightarrow$ transfert

$$\mathscr{L}\ h(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

$$\mathscr{Z}\ h(z) = C(zI - A)^{-1} B + D$$

Solutions :
- $x(t) = \exp(At) x(0^-) + \int_{0^-}^t \exp(A(t - \tau)) Bu(\tau)\, \mathrm{d}\tau$
- $x[n] = A^n x[0] + \sum_{k \in [\![0, n[\![} A^{n-k-1} Bu[k]$

Échantillonage et espace d'état

$$y_{\mathrm{s}}[n] = \tilde{C} \tilde{x}[n] + \tilde{D} u_{\mathrm{s}}[n]$$

$$\tilde{x}[n+1] = \tilde{A} \tilde{x}[n] + \tilde{B} u_{\mathrm{s}}[n]$$

Pour $\tilde{x} = x_{\mathrm{s}}$, on trouve que :
- $\tilde{A} = \exp(AT_{\mathrm{s}})$
- $\tilde{B} = \int_{\tau \in [0, T_{\mathrm{s}}]} \exp(A\tau) B$
- $\tilde{C} = C$
- $\tilde{D} = D$

II. Capterus et instrumentation

Capteur actif

- température (thermoélectricité $\to$ tension),
- flux liminaux (photoemission $\to$ courant, pyroélectricité $\to$ charge, photovoltaïque $\to$ tension)
- force, pression, acceleration (piézoélectricité $\to$ charge)
- position (effet Hall $\to$ tension)
- vitesse (induction électromagnétique $\to$ tension)

Effet thermoélectrique : Mesure de tension dans un circuit avec une température différente.

$$e = f(T_2 - T_1)$$

Effet pyroélectrique : Mesure de flux de rayonnement lumineux absorbé. Certains cristaux ont une polarisation électrique spontanée qui dépend de la température.
Effet piézoélectrique : déformation $\Rightarrow$ apparition de charges électriques (égales, mais de signes contraires sur les faces opposées), condensateur par exemple.
Effet d'induction électromagnétique : fem $\propto \vec{v}$
Effet photoélectrique : libération de charge sous l'influence d'un rayonnement lumineux.
Effet Hall : Semi-conducteur (en plaquette) soumis à une induction B (à un angle θ). Alors, $v_{\mathrm{h}} \perp I$ apparaît tel que $v_{\mathrm{h}} \propto I, B, \sin\theta$.

Capteur passif

- température, très basse température (résistivité, constante diélectrique)
- flux lumineux (résistivité)
- déformation (résistivité, perméabilité magnétique)
- position (résistivité)
- humidité (résistivité, constante diélectrique)
- niveau (constante diélectrique)

Conditionnement des capteurs passifs

- potentiomètrique : le plus simple, mais assez sensible aux fluctuations de la source & parasites (résisitif $\to$ source courant/tension continue ; impédance capacitive/inductive $\to$ source sinusoïdale)
- en pont : double potentiomètre avec mesure différentielle, moins sensible aux fluctuations & parasites (résistif $\to$ pont de Wheatstone, capacitif $\to$ Nernst/Sauty, inductif $\to$ Hay/Maxwell)
- par oscillateur : bonne protection contre les parasites, et plus simple car comptage de périodes (oscillateur sinusoïdaux, oscillateur de relaxation $\to$ rectangulaire)

Limites d'utilisation des capteurs

$$\text{nom. d'u}^{\circ}. \subseteq \text{non dét} \subseteq \text{non dest}$$

Domaine nominal d'utilisation $\to$ étendue de mesure.

Écart de précision $\varepsilon = u(m)$
Erreur de précision $e = 100 \times u(m) / m_{\text{vraie}}$

Écart de linéarité $\varepsilon_\ell = \max|\ s_{\text{lin}} - F\ |$, où F est la courbe d'étalonnage du capteur, et $s_{\text{lin}}(m) = Sm + m_0$.
Erreur de linéarité $e_\ell = 100 \varepsilon_\ell / (s_{\max} - s_{\min})$

Sensibilité $S = \mathrm{d}s / \mathrm{d}m$.

Cahier des charges : type (numérique, analogique, logique), étendue des mesures, précision de mesures, rapidité de mesures, conditions d'utilisations (températures admissibles, surcharge admissible, durée de vie, protections ?)

Hugo SALOU, Centrale Nantes 2023–2024