

Compte-Rendu TP n°3

Écoulements en conduite et pertes de charge régulières

Dans ce TP, nous analysons l'écoulement d'un fluide dans une conduite lisse. Nous observerons ainsi le régime laminaire, et le régime turbulent. Dans ces deux régimes, on observera les nombre de Reynolds respectifs, ainsi que les coefficients de pertes de charge, et les répartition de vitesses.

I. Dispositif expérimental

Dans la [Figure 1](#), on représente le dispositif expérimental, de manière synthétique. Ce système fonctionne en circuit fermé, bien que la boucle de retour n'est pas représentée sur le schéma ci-dessous.

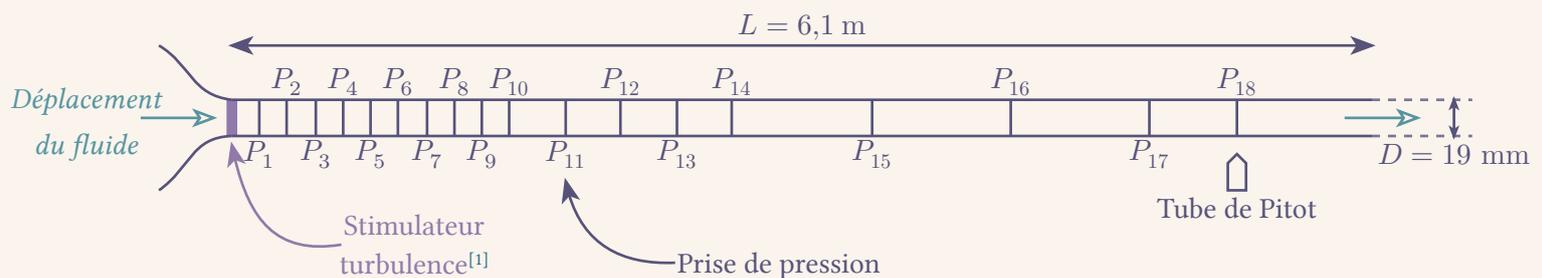


Figure 1. Dispositif expérimental

La conduite cylindrique est de grande longueur et la paroi intérieure est lisse. Afin d'obtenir un écoulement turbulent, le nombre de Reynolds Re doit être très élevé, bien plus qu'habituellement. L'ajout d'un stimulateur de turbulence (en violet sur le schéma) permet de se placer en écoulement turbulent sans avoir un nombre de Reynolds trop élevé. Ce stimulateur n'est placé *que* lorsque l'on réalise des mesures en écoulement turbulent (et non en laminaire).

Dix-huit prises de pressions sont placées sur la conduite, dont nous connaissons les positions. Un tube de Pitot déplaçable est également placé à l'extrémité de la conduite ; il permettra d'observer la répartition de vitesses dans les deux écoulements (laminaire et turbulent).

^[1]Cet élément n'est présent qu'en cas de mesures dans le cas d'un écoulement turbulent ; il n'est pas utilisé pour l'écoulement laminaire.

II. Étude théorique

II.1. Pertes de charge régulières

On considère une conduite lisse en charge cylindrique de diamètre D . La perte de charge entre

deux sections distantes de L , exprimée en hauteur de fluide, est proportionnelle à U_d^2 ; elle dépend du nombre de Reynolds Re , et du rapport géométrique L/D :

$$\Delta H = \frac{U_d^2}{2g} \times \underbrace{\varphi\left(Re, \frac{L}{D}\right)}_{\frac{L}{D}\lambda(Re)}$$

où $\lambda(Re)$ est le coefficient de pertes de charge régulières. On peut ainsi écrire

$$\Delta H = \lambda(Re) \cdot \frac{L U_d^2}{D 2g}$$

De plus, la perte de charge peut également s'exprimer comme en chute de pression entre deux sections droites qui sont distantes de L

$$\frac{\Delta H}{L} = -\frac{1}{\rho g} \frac{P_2^* - P_1^*}{L}.$$

En combinant les deux expressions précédentes, on obtient donc la valeur du coefficient de perte de charge liée à l'évolution de la pression le long de la conduite

$$\lambda(\text{Re}) = \frac{P_1^* - P_2^*}{\rho g} \frac{D}{L} \frac{2g}{U_d^2}.$$

II.2. En écoulement laminaire

On considère un fluide visqueux isovolume en régime laminaire, permanent et établi. En régime permanent, les filets fluides sont parallèles entre eux. Avec ces hypothèses, l'équation de Navier-Stokes prend la forme simplifiée suivante

$$\overrightarrow{\text{grad}} P^* = \frac{\mu}{\rho} \overrightarrow{\Delta} \vec{V}.$$

Pour une conduite cylindrique de section circulaire, dans laquelle l'écoulement est permanent et établi, le champ de vitesse est défini par :

$$\vec{V} = V(r) \cdot \vec{e}_z,$$

dans le repère cylindrique $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. Les deux inconnues $V(r)$ et $P^*(r, \theta, z)$ vérifient ainsi les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \frac{\partial P^*}{\partial r} = 0 \\ \text{(II)} \quad \frac{\partial P^*}{\partial \theta} = 0 \\ \text{(III)} \quad \frac{\partial P^*}{\partial z} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) \\ \qquad \qquad \qquad = \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right). \end{array} \right.$$

Les équations (I) et (II) montrent que la pression piézométrique ne dépend *que* de z . De plus, l'équation (III) contient un premier membre fonction de z , et un second fonction de r . Les deux sont donc égaux, et constants.

La résolution de l'équation différentielle (III) pour un régime laminaire établi conduit à un champ de vitesse dans un section droite quelconque de la forme

$$V(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP^*}{dz} (R^2 - r^2).$$

La vitesse sur l'axe de la conduite correspond au maximum de $V(r)$, autrement dit

$$V_{\text{axe}} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP^*}{dz} R^2.$$

L'expression de $V(r)$ en variables adimensionnelles s'écrit donc

$$\frac{V(r)}{V_{\text{axe}}} = 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2.$$

Le débit volumique dans la conduite est donné par

$$\begin{aligned} Q_v &= \iint_{\mathcal{S}} \vec{V}(r) \cdot \vec{n} \, dS \\ &= 2\pi \int_0^R V(r) r \, dr \\ &= -\frac{1}{8\mu} \frac{dP^*}{dz} S R^2. \end{aligned}$$

Par définition de la vitesse moyenne, ou vitesse de débit, on a $Q_v = S U_d$, d'où

$$U_d = -\frac{1}{8\mu} \frac{dP^*}{dz} R^2 = \frac{1}{2} V_{\text{axe}}.$$

En combinant les équations précédentes, il vient ainsi que $\Delta H = 8\nu L U_d / g R^2$; on obtient donc

$$\lambda(\text{Re}) = \frac{64}{\text{Re}}.$$

II.3. En écoulement turbulent

En régime turbulent établi, J. Nikuradse a établi empiriquement la loi adimensionnelle suivante pour le profil moyen de vitesse

$$\frac{V(r)}{V_{\text{axe}}} = \left(1 - \frac{r}{R} \right)^{1/n}.$$

Dans cette expression, le paramètre n dépend du nombre de Reynolds $n = n(\text{Re})$. Avec cette

loi empirique, le calcul de la vitesse moyenne conduit à

$$\frac{U_d}{V_{\text{axe}}} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}.$$

On connaît les valeurs empiriques suivantes :

- pour $Re = 4 \cdot 10^3$, on a $n = 6$;
- pour $Re = 2,3 \cdot 10^4$, on a $n = 6,6$.

Enfin, avec la relation proposée par H. Blasius en 1913, on peut calculer le coefficient de perte de charge λ en régime turbulent établi, avec l'hypothèse que $Re < 10^5$:

$$\lambda(Re) \approx \frac{0,3164}{Re^{1/4}}.$$

III. Données expérimentales

III.1. Étude des pertes de charge

Écoulement laminaire. On se place à une pression de l'ordre de 0,25 bar, en l'occurrence, 0,262 bar. On calcule le débit en mesurant le temps requis pour obtenir 20 kg d'eau : 34 s. On peut ensuite mesurer la pression aux différents points de pression P_i comme indiqué dans la Table 2. On prend soin de « tarer » les prises de pression en prenant en compte l'*offset* de pression lorsqu'aucun écoulement n'a lieu.

Prise de pression	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}	P_{16}	P_{17}	P_{18}
Laminaire [bar]	0,262	0,253	0,241	0,232	0,224	0,216	0,209	0,202	0,194	0,187	0,172	0,159	0,147	0,131	0,103	0,074	0,044	0,023
Turbulent [bar]	1,006	0,983	0,954	0,929	0,904	0,877	0,849	0,823	0,795	0,768	0,714	0,662	0,605	0,544	0,418	0,294	0,171	0,083

Table 2. Données expérimentales brutes – Étude de perte de charge

Écoulement turbulent. On place le stimulateur de turbulence, comme indiqué précédemment, et on se place à une pression de l'ordre de 1,00 bar, en l'occurrence, on se place à 1,006 bar. On calcule le débit en mesurant le temps requis pour obtenir 20 kg d'eau : 34 s. On peut ensuite mesurer la pression aux différents points de pression P_i comme indiqué dans la Table 2, avec les mêmes précautions qu'auparavant.

Estimation des incertitudes. Nous estimons les incertitudes des différentes valeurs mesurées et/ou données. Ces incertitudes sont données dans la Table 1. On distingue les incertitudes de mesure de pression dans le cas laminaire (noté l.) et dans le cas turbulent (noté t.). Dans la Table 1, le « temps t » correspond au temps de remplissage du bac, utilisé pour la mesure du débit.

Masse m	$u(m) = 0,1 \text{ kg}$
Temps t	$u(t) = 0,5 \text{ s}$
Viscosité μ	$u(\mu) = 0,4 \text{ PI}$
Masse vol. ρ	$u(\rho) = 5 \text{ kg/m}^3$
Pression (l.) P_i	$u(P_i) = 0,001 \text{ bar}$
Pression (t.) P_i	$u(P_i) = 0,003 \text{ bar}$

Table 1. Estimation des incertitudes

III.2. Étude des vitesses

On mesure, pour les deux écoulements, la pression en utilisant le tube de Pitot déplaçable. On prend également en compte la pression statique en mesurant la valeur de P_{18} . Les incertitudes de mesure de la pression restent les mêmes. On estime les incertitudes sur la position r du tube de Pitot à $u(r) = 200 \mu\text{m}$. On réalise des mesures avec un espacement $\Delta r = 1 \text{ mm}$, en commençant à $r_1 = 1,1 \text{ mm}$.

Dans la Table 3 (page 4), on retrouve les valeurs mesurées par la sonde de Pitot pour l'écoulement laminaire et turbulent. On prend soin de réeffectuer les mesures de temps permettant de calculer le débit, les pressions initiales étant légèrement différentes. On trouve ainsi 37 s pour 20 kg en écoulement laminaire, et 18 s pour 20 kg en écoulement turbulent.

Dans la Table 3 (page 4), on notera « stat. » la pression statique, *i.e.* la pression P_{18} .

Position [mm]	stat.	1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1	7,1	8,01	9,01	10,1	11,1	12,1	13,1	14,1
Pression (l.) [bar]	0,023	0,03	0,043	0,057	0,073	0,088	0,101	0,111	0,117	0,121	0,12	0,116	0,109	0,099	0,087
Pression (t.) [bar]	0,083	0,148	0,178	0,193	0,203	0,211	0,217	0,223	0,227	0,23	0,23	0,228	0,226	0,223	0,216

Table 3. Données expérimentales brutes – Étude des vitesses

IV. Analyse des résultats

IV.1. Étude des pertes de charge

IV.1.a. Écoulement laminaire

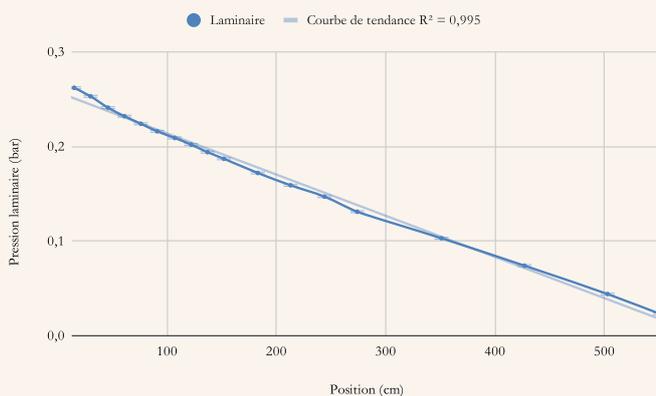


Figure 2. Représentation graphique des données de la Table 2 (cas laminaire)

De la Figure 2, on en déduit que la pression est une fonction affine par rapport à la position. On peut calculer cette pente par régression linéaire, ou on peut se placer aux deux extrémités de la conduite (ces deux sections sont choisies pour avoir la plus grande précision).

On en déduit

$$Q_v = 0,00071 \pm 0,00001 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$U_d = 2,50 \pm 0,04 \text{ m/s},$$

$$\text{Re} = 8\,000 \pm 2\,000,$$

$$\lambda(\text{Re}) = 0,0326 \pm 0,0008.$$

On reporte la valeur de $\lambda(\text{Re})$ sur la Figure 4.

La valeur de Re peut sembler élevée, mais la conduite étant lisse, il est possible d'obtenir des valeurs de Re élevées tout en étant toujours en régime laminaire.

En utilisant la formule du débit développée dans l'étude théorique, on trouve

$$Q_{v, \text{th}} = 0,0006 \pm 0,0001 \text{ kg/m}^3.$$

Les deux valeurs sont compatibles : on trouve un z -score de $0,9 < 2$.

La présence de l'*offset*, bien qu'elle semble problématique, n'a que peu d'importance quant aux mesures réalisées. En effet, nous réalisons des différences de pression, l'*offset* n'apparaît donc pas. Le seul calcul utilisant une valeur de pression directement est lors du calcul des incertitudes mais, qu'il soit présent ou non, l'*offset* ne fait pas varier les incertitudes avec l'arrondi à 1 chiffre significatif.

IV.1.b. Écoulement turbulent

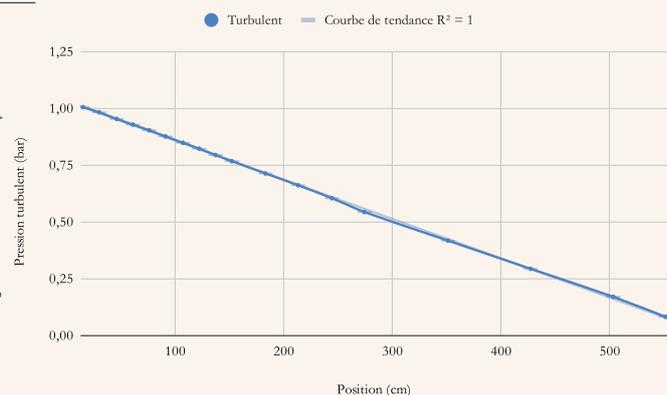


Figure 3. Représentation graphique des données de la Table 2 (cas turbulent)

De la Figure 3, on en déduit que la pression est une fonction affine par rapport à la position. On peut calculer cette pente par régression linéaire, ou on peut se placer aux deux extrémités de la conduite (ces deux sections sont choisies pour avoir la plus grande précision).

On en déduit

$$Q_v = 0,00121 \pm 0,00003 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$U_d = 4,3 \pm 0,1 \text{ m/s},$$

$$\text{Re} = 14\,000 \pm 4000,$$

$$\lambda(\text{Re}) = 0,044 \pm 0,002.$$

On reporte la valeur de $\lambda(\text{Re})$ sur la Figure 4.

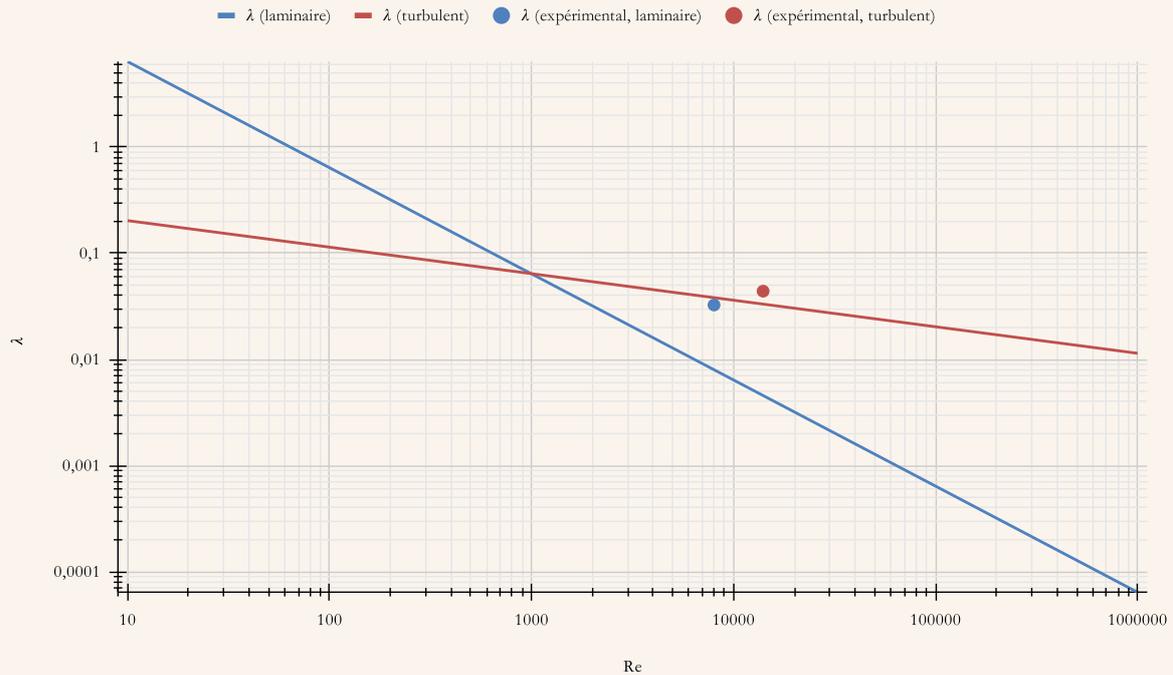


Figure 4. Coefficient de perte de charge en fonction du nombre de Reynolds

Comme le montre la [Figure 4](#), nos valeurs du coefficient $\lambda(\text{Re})$ ne correspondent pas vraiment à celles que l'on devrait trouver. Ceci peut être dû à des limites des hypothèses que l'on a réalisées. (On demandait notamment $\text{Re} < 10^5$ pour l'écoulement turbulent.)

IV.2. Étude des vitesses

Comme montré sur la [Figure 5](#) (page 6) les profils de vitesse correspondent globalement au modèle théorique.

Il est cependant nécessaire de revoir l'hypothèse de viscosité du fluide, en particulier dans l'écoulement laminaire. En effet, au bord de la conduite, la vitesse ne semble pas être nulle.

De plus, pour l'écoulement turbulent, le nombre de Reynolds utilisé étant bien plus grand que les valeurs de l'énoncé, nous avons utilisé $n = 8$.

V. Conclusion

De ce TP, on en conclut qu'il est possible de mesurer une perte de charge régulière dans une conduite. Une conduite lisse, comme celle utilisée, permet d'obtenir des régimes laminaires

même avec des nombres de Reynolds élevés, d'où l'intérêt du stimulateur de turbulence.

Mesurer le coefficient de perte de charge $\lambda(\text{Re})$ est possible, mais cela ne correspond pas toujours aux résultats attendus. Il est nécessaire de bien considérer les hypothèses réalisées, mais également leurs limites.

À l'aide d'un tube de Pitot, on peut observer le profil de vitesse dans la conduite. Ceci permet de valider ou non les hypothèses considérées (et notamment la viscosité du fluide).

Fin du compte-rendu

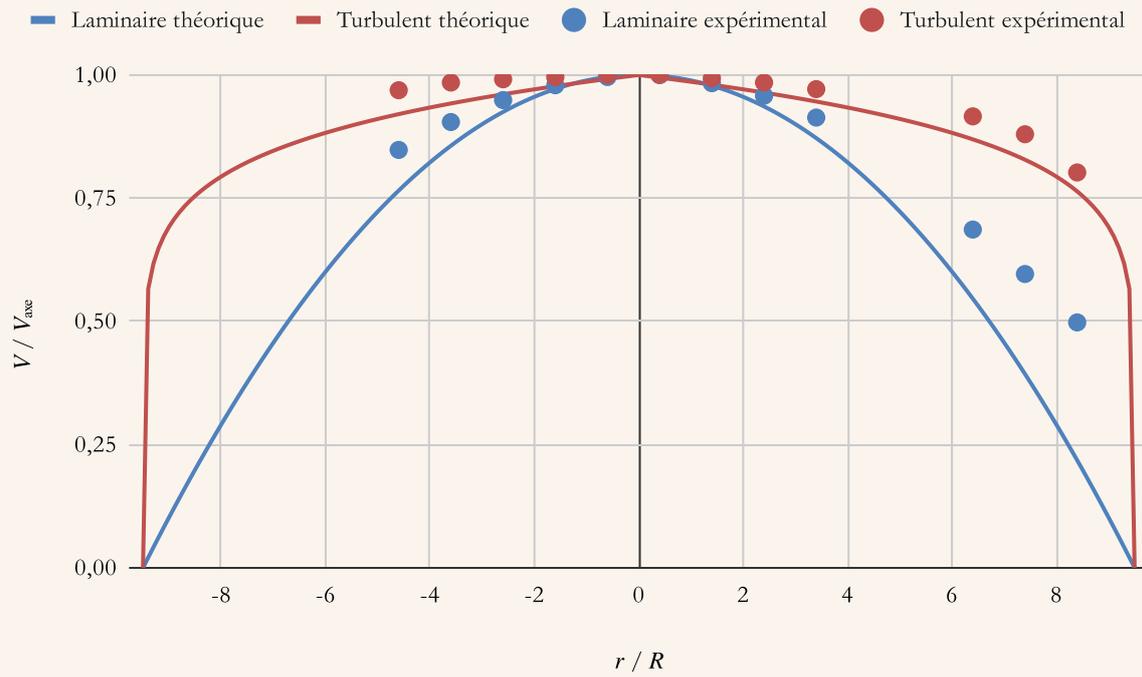


Figure 5. Profils de vitesse laminaire/turbulent théorique/expérimental