

Compte-Rendu

TP n°3-4

*Méthodes numériques
en mécanique*

Hugo SALOU
Changlin LI

Table des matières

Introduction	3
Problème I. Tube épais sous pression interne	4
I.1. Modélisation du problème	4
I.2. Choix du maillage	4
I.3. Résultats	4
I.3.a. Champ de déplacement obtenu	4
I.3.b. Champ de contrainte obtenu	5
I.3.c. Étude de la convergence	5
I.3.d. Comparaison des différents types d'éléments	6
I.4. Analyse de résistance	6
I.5. Analyse paramétrique de l'épaisseur (bonus)	6
I.5.a. Tubes très épais	6
I.5.b. Tubes très minces	7
Problème II. Étude d'une plaque trouée	8
II.1. Modélisation du problème	8
II.2. Choix du maillage	8
II.3. Résultats	8
II.3.a. Champ de déplacement obtenu	8
II.3.b. Champ de contrainte obtenu	9
II.3.c. Influence de la présence du trou	9
II.3.d. Étude de la convergence	10
II.3.e. Comparaison des différents types d'éléments	10
II.3.f. Contraintes au droit du trou	10
II.3.g. Hoop stress	10
II.4. Analyse de résistance	11
Conclusion	12

Introduction

L'objectif de ce TP est de réaliser une modélisation physique de deux différents problèmes, et d'utiliser des outils informatiques (en l'occurrence CAST3M) pour aider à la résolution de ces problèmes.

L'outil CAST3M permet de calculer des solutions approchées par la méthode des éléments finis. On définit la géométrie du problème, les conditions limites avec les forces et pressions appliquées, les hypothèses du problème, et les caractéristiques du matériau. Puis, CAST3M réalise la simulation et nous donne une solution approchée de notre problème.

Ceci est très utile dès lors que nous n'avons pas de solution analytique, comme pour le [Problème II](#). Nous pouvons donc nous approcher avec une précision arbitraire (la taille des éléments) de cette solution. Ceci requiert cependant la vérification de la convergence de la méthode des éléments finis.

Dans le [Problème I](#), on considère un tube épais sous pression interne. Dans le [Problème II](#), on considère une plaque trouée sous traction.

Problème I.

Tube épais sous pression interne

I.1. Modélisation du problème

Dans le cadre de ce problème, on s'intéresse à un tube cylindrique de rayon interne $R_i = 200$ mm et d'épaisseur $E_p = 100$ mm sous pression interne $p = 100$ MPa, comme le montre la section représentée en Figure 1. Les caractéristiques élastiques du matériau sont connues : module d'Young valant $E = 200$ GPa et coefficient de Poisson $\nu = 0,3$. On supposera la déformation plane. En effet, on considère un cylindre bien plus long que large (longueur $\ell \gg E_p + R_i$).

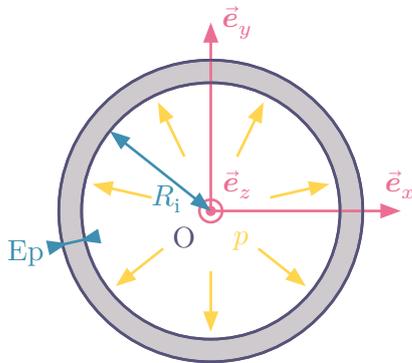


Figure 1. Représentation (non à l'échelle) du problème 1

Dans une première modélisation, on ne considère que la section du cylindre. En effet, les déformations étant planes et, la géométrie et les constantes du problème ne variant pas en fonction de la côte z , nous pouvons réaliser cette hypothèse. Cette hypothèse nous permet de ne réaliser qu'un maillage 2D, au lieu d'un maillage 3D.

De plus, afin de simplifier la modélisation davantage, nous pouvons considérer les symétries axiales d'axes (Ox) et (Oy) . Celles-ci nous permettent de ne considérer qu'un quart de cercle, en particulier, le quart en haut à droite, comme représenté sur la Figure 2.

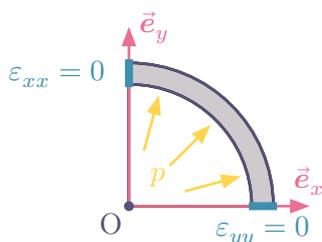
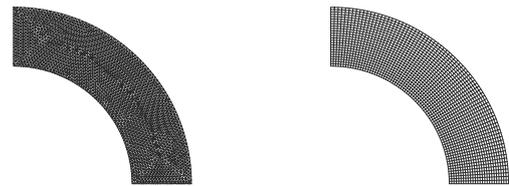


Figure 2. Simplification du problème

On précise qu'afin de conserver les propriétés de symétries décrites plus tôt, nous devons imposer les conditions limites, comme montré sur la Figure 2. Aucune condition limite en contrainte n'est donnée.

I.2. Choix du maillage

L'outil CAST3M nous permettant d'utiliser différents types de maillage, il est important d'étudier ce choix. Comme le montre la Figure 3, un maillage triangulaire est adapté lorsque ce maillage est déstructuré. Avec un maillage structuré, une maille triangulaire et une maille quadratique sont équivalents.



(a) Maillage triangulaire déstructuré (b) Maillage quadratique structuré

Figure 3. Différents types de maillages considérés

Dans la suite du problème, nous utiliserons une maille triangulaire déstructurée, et nous comparerons ce choix avec les autres maillages possibles en fin de problème.

I.3. Résultats

Dans cette section, nous présenterons les différents résultats obtenus et commenterons sur la cohérence de ces résultats avec le problème mécanique.

I.3.a. Champ de déplacement obtenu

Le champ de déplacement $\vec{u}(\vec{x})$ obtenu est représenté en Figure 4 (page 5). Nous obtenons le résultat attendu pour le problème mécanique : un cylindre dont le diamètre intérieur augmente.

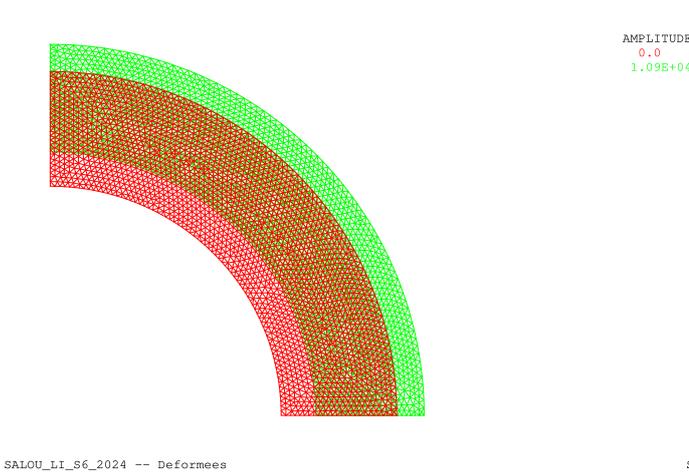


Figure 4. Champ de déplacement

I.3.b. Champ de contrainte obtenu

L'analyse du champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ obtenu est bien plus adaptée dans un repère polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, vue la géométrie cylindrique du tube et les hypothèses simplificatrices réalisées.

En Figure 5, on représente le champ σ_{rr} . Il correspond au champ attendu : contraintes maximales (en module) visant à compresser sur le bord intérieur, et contraintes plus faibles (mais importantes) visant à dilater le bords extérieur.



Figure 5. Représentation du champ σ_{rr}

Pour le champ $\sigma_{\theta\theta}$, représenté en Figure 6, les résultats sont également cohérents avec le dispositif physique : la contrainte en cisaillement vise à dilater le cylindre, peu importe son emplacement.



Figure 6. Représentation du champ $\sigma_{\theta\theta}$

I.3.c. Étude de la convergence

En Figure 7, on représente le champ de contraintes radiales entre l'intérieur et l'extérieur. On trace ainsi la solution analytique

$$\sigma_{r,r}(r) = p \cdot \frac{R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \cdot \left(1 - \frac{R_e^2}{r^2} \right) \quad (1)$$

et les contraintes obtenues avec CAST3M pour différentes résolutions de maillage. Cette résolution correspond au nombre de points sur la ligne radiale, tout en gardant un maillage régulier sur le quart de cylindre.

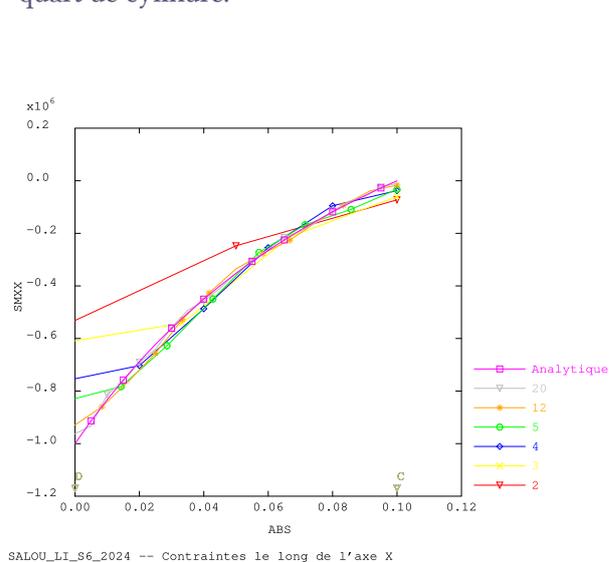
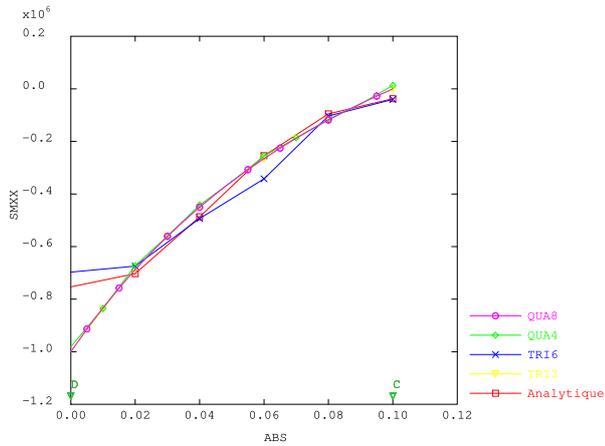


Figure 7. Convergence de la méthode des éléments finis

On observe bien la convergence vers la solution analytique. Une même convergence peut être observée pour le champ $\sigma_{\theta\theta}$.

I.3.d. Comparaison des différents types d'éléments

On compare les différents types d'éléments, comme représenté en Figure 8. Les différents maillages permettent d'obtenir des résultats proches de la solution analytique. Cette figure a été réalisée avec un petit nombre d'éléments, pour rendre visible les différences entre les types de maillages. Mais, un maillage déstructuré triangulaire avec peu d'éléments est moins adapté qu'un maillage structuré quadratique avec le même nombre d'éléments.



SALOU_LI_S6_2024 -- Contraintes le long de l'axe X

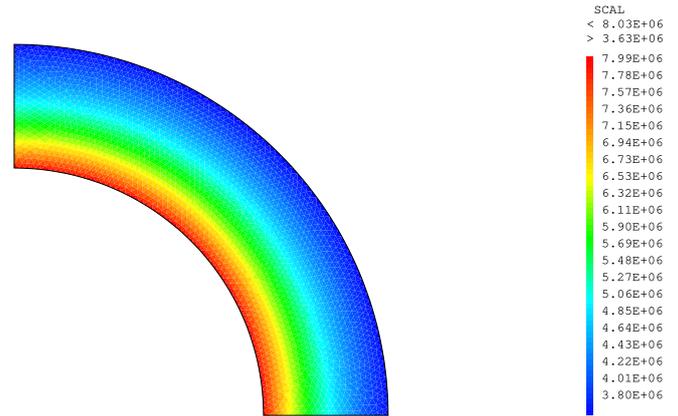
Figure 8. Comparaison des types d'éléments

I.4. Analyse de résistance

Dans le cadre d'une application, on cherche à estimer la pression maximale p que peut supporter un tube en acier de limite élastique 800 MPa. Pour cela, on utilise la contrainte équivalente de von Mises σ_{VM} car le matériau est ductile, c'est un métal, et qu'elle permet de prendre en compte le champ de contrainte dans les trois directions (radiale, orthoradiale, et le long du cylindre).

On cherche donc une pression p_{max} maximale vérifiant l'inégalité $\sigma_{VM, max} < 800$ MPa.

On trouve $p_{max} = 255$ MPa. Sur la Figure 9, on représente la contrainte équivalente de von Mises dans le cas $p = p_{max}$.



SALOU_LI_S6_2024 -- Contrainte Von Mises

Figure 9. Contrainte σ_{VM} à $p = p_{max}$

I.5. Analyse paramétrique de l'épaisseur (bonus)

I.5.a. Tubes très épais

Dans le cas où l'épaisseur est très élevée (dans nos simulations, on a $E_p = 5R_i$), on observe deux comportements sur les surfaces intérieures et extérieures.

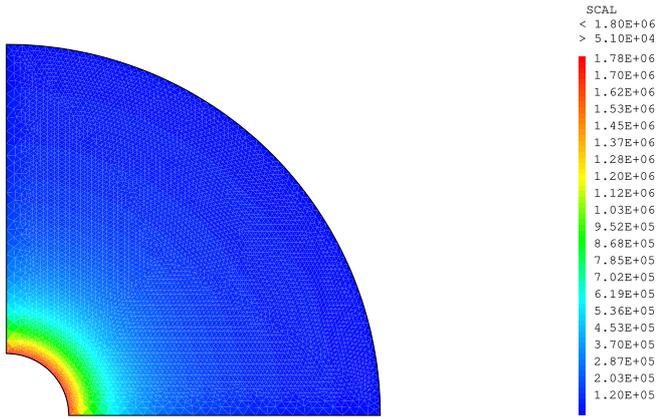
- Sur la surface intérieure, la contrainte correspond précisément à une contrainte hydrostatique : on a

$$\sigma_{VM}(r = R_i) = -p. \quad (2)$$

- Sur la surface extérieure, la surface est libre de toute contrainte :

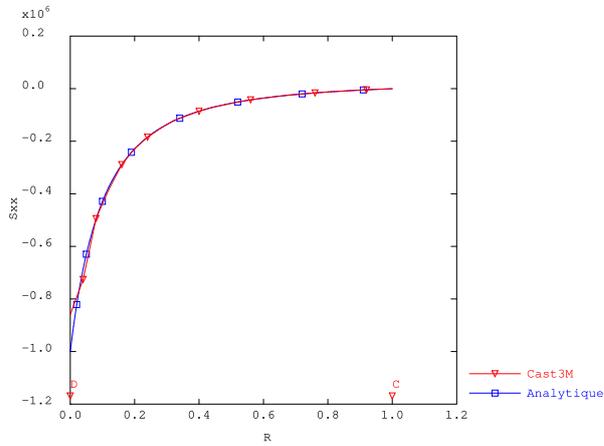
$$\sigma_{VM}(r = R_i + E_p) = 0. \quad (3)$$

On représente ces résultats sur la Figure 10 (page 7). Ces résultats sont cohérents avec l'hypothèse du tube très épais.



SALOU_LI_S6_2024 --Contrainte Von Mises

(a) représentation 2D



SALOU_LI_S6_2024 --Contrainte Von Mises

(b) le long d'une ligne radiale

Figure 10. Contrainte σ_{VM} pour un tube très épais

I.5.b. Tubes très minces

On se place dans le cas où $R_i \gg E_p$. Ainsi, nous avons les équivalences :

$$R_i \sim r \sim R_e \quad \text{avec } r \in [R_i, R_e], \quad (4)$$

ceci est en particulier vrai pour $r = R_0$, le rayon moyen.

De (4), on en déduit que $R_e^2/r^2 \sim 1$, d'où l'approximation

$$\sigma_{rr} = 0. \quad (5)$$

De plus, on développe

$$R_e^2 - R_i^2 = E_p \cdot (R_e + R_i) \sim 2 E_p R_i, \quad (6)$$

d'où

$$\sigma_{\theta\theta} \sim p \frac{R_0}{2 E_p} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{R_e^2}{r^2}\right)}_{\sim 2} \sim p \frac{R_0}{E_p}. \quad (7)$$

Nous retrouvons donc les expressions demandées.

Problème II.

Étude d'une plaque trouée

II.1. Modélisation du problème

On considère une plaque en acier trouée de dimensions $L_x = 100$ mm, $L_y = 50$ mm et d'épaisseur $E_p = 5$ mm, comme représenté sur la Figure 11. Elle est percée d'un trou en son centre de rayon $R = 5$ mm.

Le module d'Young du matériau de la plaque est $E = 200$ GPa et son coefficient de Poisson a pour valeur $\nu = 0,3$.

On applique une traction $\pm \vec{f}$ à chaque extrémité de la plaque, avec $\|\vec{f}\| = 20$ kN.

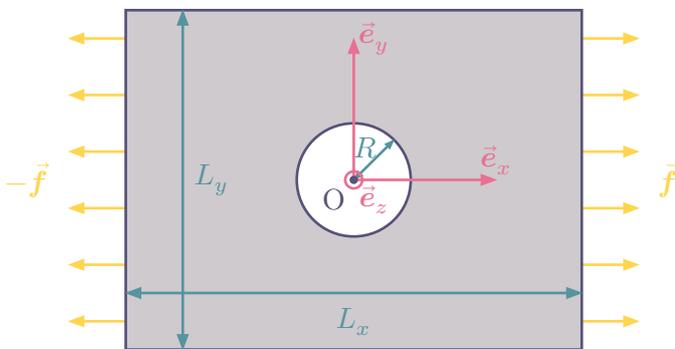


Figure 11. Représentation (non à l'échelle) du problème 2

Pour commencer, la plaque étant plane, on se place dans des hypothèses de contraintes planes. En effet, avec la traction, l'épaisseur de la plaque peut varier, mais aucune contrainte n'est appliquée selon l'axe (Oz).

De plus, par symétries selon les axes (Ox) et (Oy), on peut, comme dans le problème 1, ne considérer qu'un quart de la plaque. On applique les conditions limites comme montré dans la Figure 12.

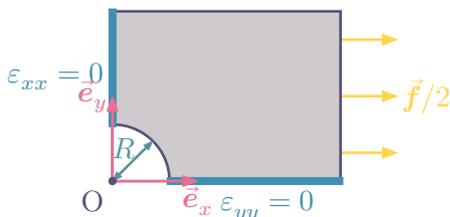
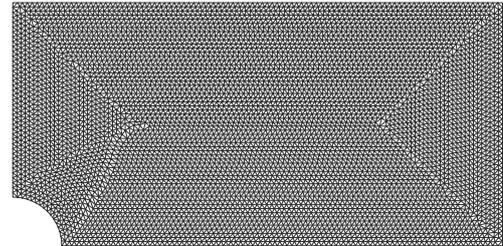


Figure 12. Simplification du problème

II.2. Choix du maillage

Dans ce problème, nous utiliserons principalement un maillage triangulaire déstructuré, comme repré-

senté en Figure 13. Nous comparerons les différents types de maillages en fin de TP.



SALOU_LI_S6_2024 --Maillage et Contour

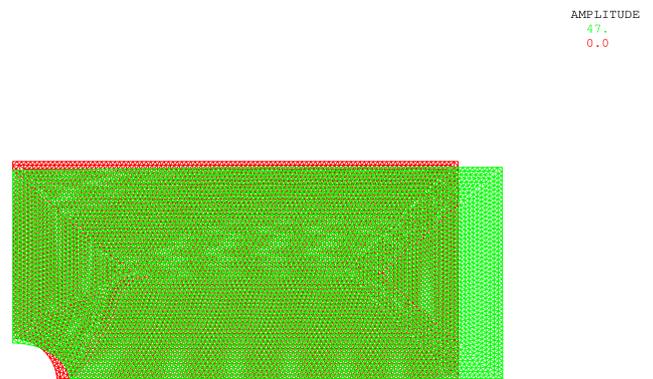
Figure 13. Maillage triangulaire déstructuré

II.3. Résultats

Dans cette section, nous présenterons les différents résultats obtenus et commenterons sur la cohérence de ces résultats avec le problème mécanique.

II.3.a. Champ de déplacement obtenu

Le champ de déplacement $\vec{u}(\vec{x})$ obtenu est représenté en Figure 14 (page 8).



SALOU_LI_S6_2024 --Deformees

Figure 14. Champ de déplacement

Nous obtenons le résultat attendu pour le problème mécanique : on étire la plaque trouée, on augmente

donc sa longueur en réduisant sa largeur (et son épaisseur, mais non représentée). Ainsi, le cercle devient une ellipse.

II.3.b. Champ de contrainte obtenu

Étudier le champ de contraintes équivalentes de von Mises est, encore une fois, très adapté ici. Le matériau est un métal, et ce champ prend en compte toutes les composantes du champ de contraintes. On le représente sur la Figure 15(d).

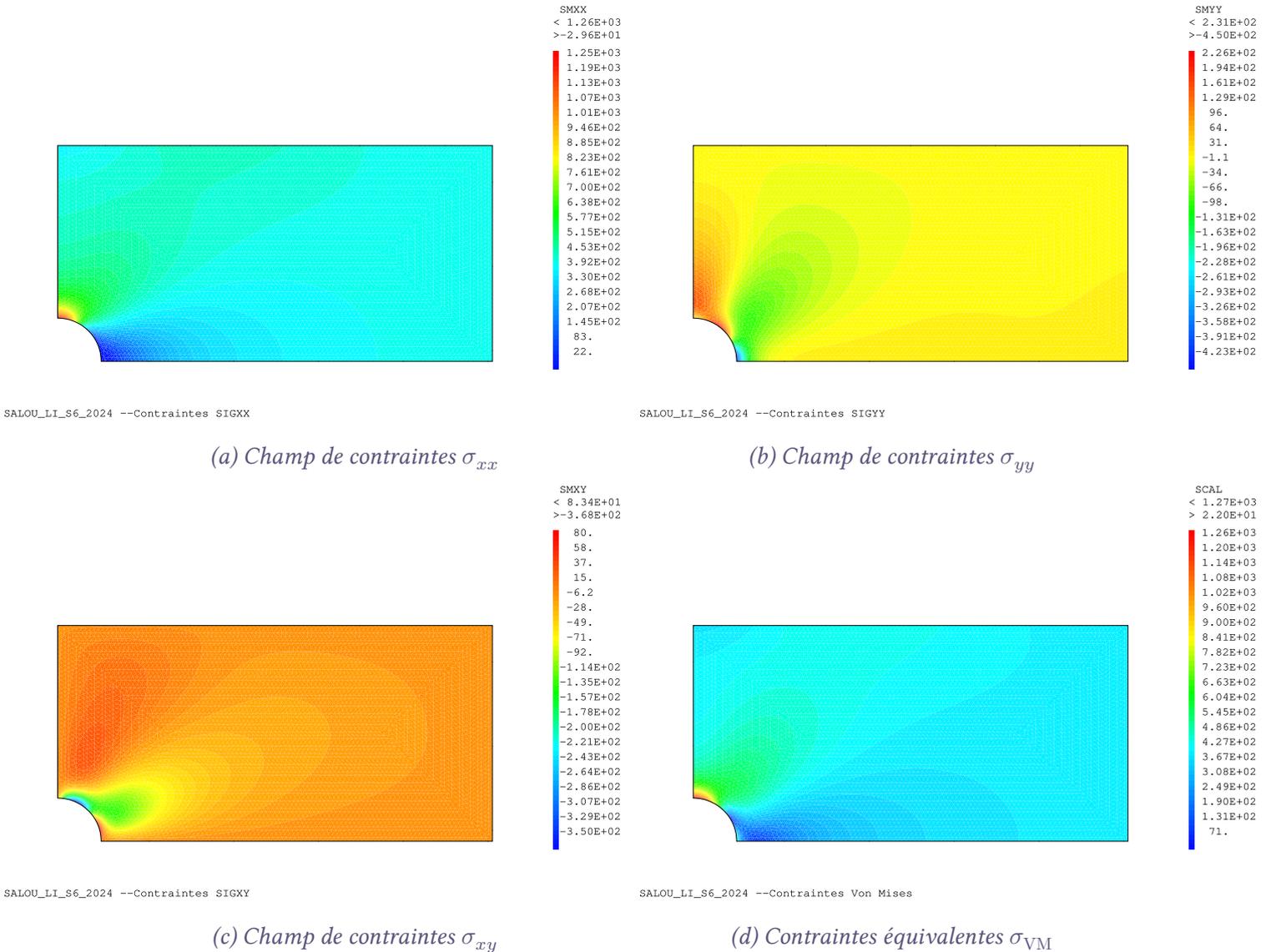


Figure 15. Champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$

Dans la Figure 15(a)–(c), on représente les champs de contraintes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} . Ces champs sont cohérents avec le modèle physique.

- Pour σ_{xx} , on étire la plaque, on obtient donc une contrainte positive partout, mais relativement faible dans le coin bas du cercle (surface quasi-libre dans cette direction).
- Pour σ_{yy} , la plaque se contracte, on obtient donc une contrainte négative partout, sauf proche du trou, où la plaque se dilate légèrement.
- Pour σ_{xy} , la plaque est contractée selon une direction due à la présence du trou.

Le point le plus sollicité est le coin haut du trou. Ceci est cohérent vu les processus physique en jeu (traction selon l'axe (Ox)) et la géométrie de la plaque trouée.

II.3.c. Influence de la présence du trou

Sans trou, la plaque « pleine » est en traction unidirectionnelle. On obtient un tenseur des contraintes constant.

C'est la présence de ce trou qui implique la non-uniformité du champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$.

II.3.d. Étude de la convergence

On mesure $\sigma_{VM, \max}$ avec différentes résolutions de maillage. La méthode converge dès lors que l'on a $\sigma_{VM, \max}$ qui converge vers une constante quand le maillage est de plus en plus fin (*i.e.* qu'on se rapproche d'un milieu continu).

Dans la Figure 16, on représente la valeur de $\sigma_{VM, \max}$ en fonction de la taille d'éléments (ici représentées décroissantes, sur une échelle logarithmique). On observe une convergence vers une constante.

De plus, on remarque qu'au delà d'une taille d'élément de 0,5 mm, la différence entre l'approximation et la vraie valeur est inférieure à 3 % (les lignes rouges sont des marges à $\pm 3\%$ de la valeur limite de $\sigma_{VM, \max}$). On peut donc se placer avec une telle taille d'élément et estimer une erreur à 3 %.

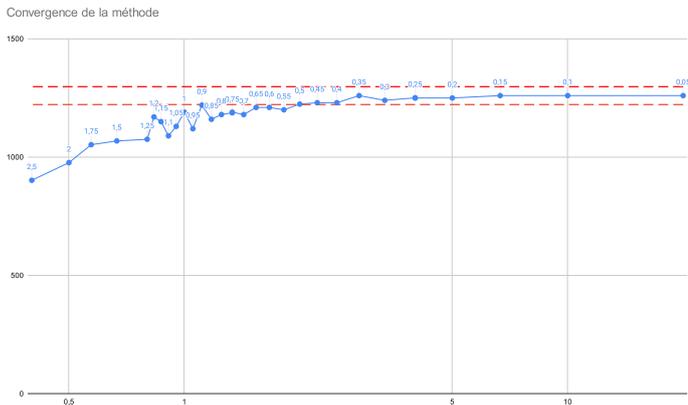


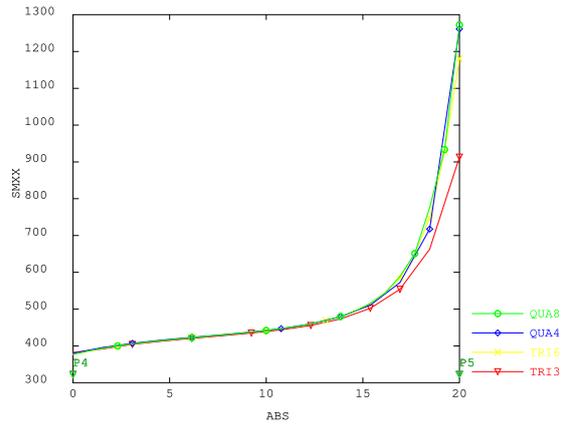
Figure 16. Convergence de la méthode

II.3.e. Comparaison des différents types d'éléments

On compare les différents types d'éléments, comme représenté en Figure 17. Les différents maillages permettent d'obtenir des résultats proches de la solution analytique. Cette figure a été réalisée avec un petit nombre d'éléments, pour rendre visible les différences entre les types de maillages.

On remarque qu'une interpolation linéaire semble moins adaptée qu'une interpolation quadratique (différences entre TRI3–TRI6 et entre QUA4–QUA8).

En Figure 17, on représente la contrainte σ_{xx} entre le haut du trou et le haut de la plaque (le long de l'axe (Oy)) : à droite du graphe, on se situe proche du trou, et à gauche, on se situe en haut de la plaque.



SALOU_LI_S6_2024 --Rigidite

Figure 17. Comparaison des types d'éléments

II.3.f. Contraintes au droit du trou

On étudie les contraintes normales, de cisaillement et de von Mises au droit du trou, c'est à dire aux coordonnées (x, y) avec $x = 0$ et $y > 0$.

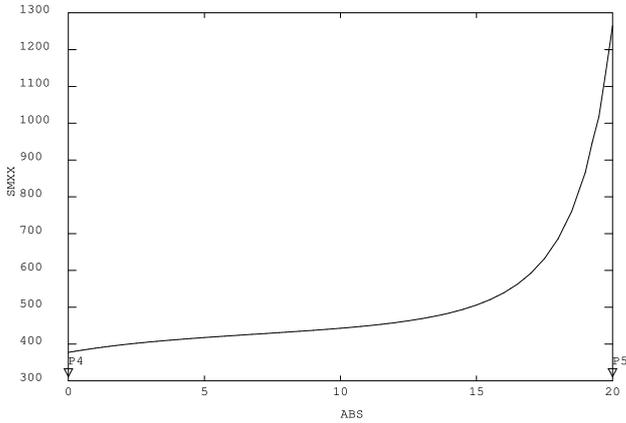
Dans la Figure 18 (page 11), on représente les contraintes σ_{xx} et σ_{yy} (contraintes normales) et la contrainte σ_{xy} (contrainte de cisaillement) au droit du trou. Au côté droit se trouve le trou, et au côté gauche se trouve le bord haut de la plaque. Ceci est cohérent, vue le problème physique, et la Figure 15(a)–(c) (page 9).

Il semble cependant qu'une erreur d'approximation soit présente. En effet, comme le montre la Figure 18(c), la contrainte σ_{xy} devrait être globalement nulle. Mais, en comparant avec la Figure 18(a)–(b), on remarque que ces contraintes sont très faibles comparées aux normales. On peut donc considérer que le droit du trou n'a pas de contraintes en cisaillement.

II.3.g. Hoop stress

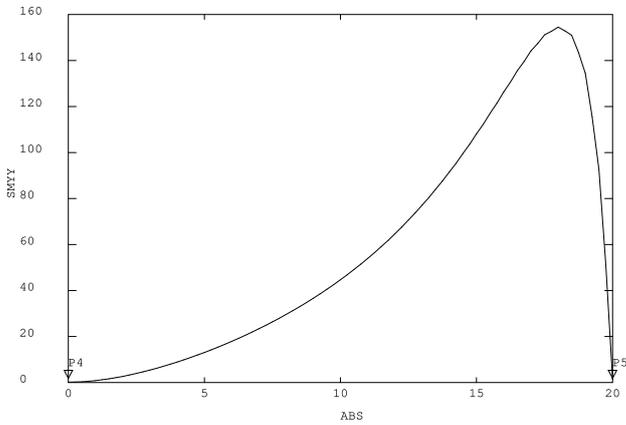
On calcule le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ en coordonnées polaires, et on regarde l'évolution de la contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ (*hoop stress*) autour du trou. On obtient donc les résultats montrés en Figure 19. À gauche, on a la partie haute du cercle, et à droite, on a le côté droit.

Les résultats sont cohérents avec le champ de déplacement (Figure 14). En effet, on a $\sigma_{\theta\theta} > 0$ car le dessus du cercle est étendu, et on a $\sigma_{\theta\theta} < 0$ lorsque la plaque est contractée selon la direction (Oy) .



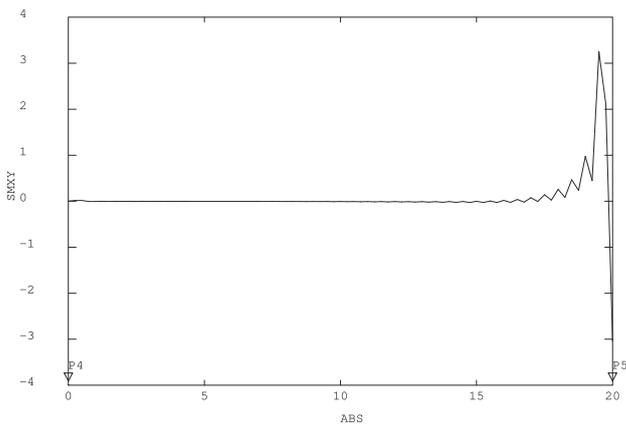
SALOU_LI_S6_2024 --Evolution de SIGXX

(a) Champ de contraintes σ_{xx}



SALOU_LI_S6_2024 --Evolution de SIGYY

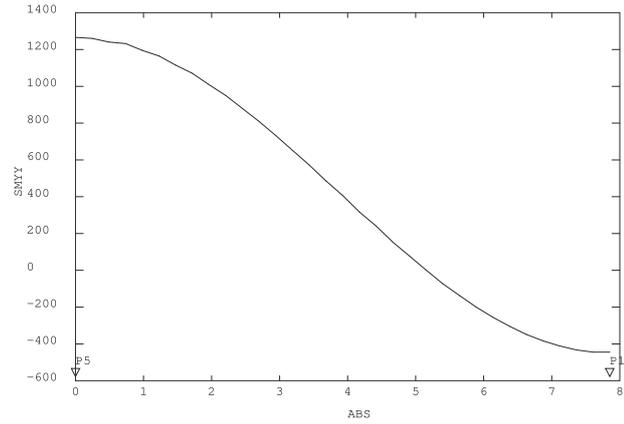
(b) Champ de contraintes σ_{yy}



SALOU_LI_S6_2024 --Evolution de SIGXY

(c) Champ de contraintes σ_{xy}

Figure 18. Champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ au droit du trou



SALOU_LI_S6_2024 --Evolution de SIGTT

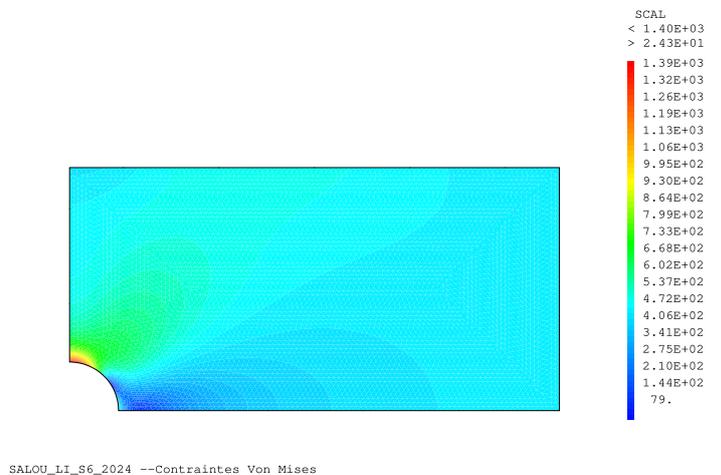
Figure 19. Contraintes circonférentielles au tour du trou (hoop stress)

II.4. Analyse de résistance

Dans le cadre d'une application, on cherche à estimer la force maximale f que peut supporter la plaque en acier de limite élastique 1400 MPa. Pour cela, on utilise la contrainte équivalente de von Mises σ_{VM} car le matériau est ductile, c'est un métal, et qu'elle permet de prendre en compte le champ de contrainte dans les trois directions.

On cherche donc une force f_{max} maximale vérifiant l'inégalité $\sigma_{VM, max} < 1400$ MPa ; ce point de contrainte maximale est le coin haut du trou, comme déterminé précédemment.

On trouve $f_{max} = 22,1$ kN. Sur la Figure 20, on représente la contrainte équivalente de von Mises dans le cas $f = f_{max}$.



SALOU_LI_S6_2024 --Contraintes Von Mises

Figure 20. Contrainte σ_{VM} à $f = f_{max}$

Conclusion

L'utilisation de CAST3M dans ces deux problèmes nous permet une analyse détaillée des contraintes exercées sur la géométrie. La variété de post-traitements disponibles nous permet d'analyser la convergence de la méthode, les contraintes selon différents systèmes de coordonnées, les contraintes équivalentes, *etc.* De plus, relancer une simulation, dans les mêmes conditions, donne le même résultat contrairement à une expérience physique. Ceci permet de vérifier et comparer aisément les résultats. Ces simulations requiert cependant quelques précautions pour la vérification de la convergence de la méthode. Finalement, ces simulations sont facilement paramétrables, ce qui permet de modifier un paramètre et observer son influence sur le problème (dans le [Problème I](#), l'épaisseur du cylindre et la pression centrale ; dans le [Problème II](#), la présence ou non d'un trou et la force de traction).