Théorie des caractères.

1 Exercice 1. *Rappels de cours*

Montrer que :

1. *une représentation (V, ρ) est irréductible si, et seulement si on a $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$;*
2. *deux représentations (V, ρ) et (V', ρ') sont isomorphes si, et seulement si $\chi_V = \chi_{V'}$.*

1. On procède en deux temps.
   - « $\Longrightarrow$ ». Si V est irréductible alors, par le lemme de Schur, on a $\dim \mathrm{Hom}_G(V, V) = 1$ et donc
   $$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \dim \mathrm{Hom}_G(V, V) = 1$$
   - « $\Longleftarrow$ ». Si on écrit $V = \bigoplus_{k=1}^r W_k^{n_k}$ où W_k est une représentation irréductible, deux) deux non isomorphe, et avec $n_k \geq 1$. Ainsi,
   $$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \left\langle \chi_V, \sum_{k=1}^r n_k \chi_{W_k} \right\rangle = \sum_{k=1}^r n_k \langle \chi_V, \chi_{W_k} \rangle = \sum_{k=1}^r n_k^2.$$
   Or, $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$ donc $\sum_{k=1}^r n_k^2 = 1$ avec $n_k \geq 1$. On en déduit que $r = 1$ et $n_1 = 1$. Ainsi V est irréductible.
2. Soient (V, ρ) et (V', ρ') deux représentations de G. On décompose $V = \sum_{W_k \in \mathcal{I}_G} W_k^{n_k}$ avec les W_k irréductibles, et deux à deux non isomorphes. Or, $\langle \chi_V, \chi_{W_k} \rangle = n_k$.

▷ « $\implies$ ». Si $(V, \rho) \cong (V', \rho')$, alors il existe $u \in \mathrm{GL}(V, W)$ tel que pour tout $g \in G$,

$$\rho'(g) = u \circ \rho(g) \circ u^{-1}.$$

Ainsi, $\chi_V(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g)) = \mathrm{Tr}(\rho'(g)) = \chi_{V'}(g)$. On en conclut $\chi_V = \chi_{V'}$.

▷ « $\impliedby$ ». Si $\chi_V = \chi_{V'}$ alors $\langle \chi_{V'}, \chi_{W_k} \rangle = n_k$ et donc

$$V' \cong \bigoplus_{W_k \in \mathscr{I}_G} W_k^{n_k} = V.$$

2 Exercice 2. *Représentation d'une action de groupe*

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. On note également $\mathbb{O}_1, \ldots, \mathbb{O}_k$ les orbites de X sous l'action de G. On définit la représentation associée à cette action de la manière suivante : on pose

$$V_X := \bigoplus_{x \in X} \mathbb{C} e_x,$$

et $g \in G$ agit sur V_X par

$$g \cdot \Big(\sum_{x \in X} a_x e_x \Big) := \sum_{x \in X} a_x e_{g \cdot x}.$$

1. *Montrer que $\chi_{V_X}(g) = \#\{x \in X \mid g \cdot x = x\}$.*

2. **a)** *Montrer que V_X^G est engendré par les $e_{\mathbb{O}_i} := \sum_{x \in \mathbb{O}_i} e_x$.*

b) *En déduire que le nombre d'orbite de X est égal à $\dim(V_X^G)$.*

On suppose que l'action de G est transitive. La représentation se décompose donc en $\mathbb{1} \oplus H$ où H ne contient pas de sous-représentation isomorphe à la représentation triviale.

3. *On fait agir G sur $X \times X$ de manière diagonale. Montrer que $\chi_{V_{X \times X}} = \chi_{V_X}$.*

4. *On dit que G agit deux fois transitivement si $\#X \geq 2$ et pour tous couples $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times X$ avec $x_1 \neq y_1$ et $x_2 \neq y_2$ il existe $g \in G$ tel que $g \cdot (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.*

Montrer que G agit deux fois transitivement si et seulement si l'action $G \curvearrowright X \times X$ a deux orbites.

5. *Montrer que G agit deux fois transitivement si et seulement si $\langle \chi_{V_X}^2, \mathbb{1} \rangle = 2$ si et seulement si H est irréductible.*

Applications :

6. *On prend l'action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur $[\![1, n]\!]$.*

a) *Retrouver que V_X se décompose en une somme de deux représentations irréductibles $\mathbb{1} \oplus H$.*

b) *Calculer le caractère de la représentation standard.*

7. *On prend l'action par translation de G sur lui-même. Calculer le caractère de la représentation régulière.*

1. On considère la base duale $(e_x^\star)_{x\in X}$ de $(e_x)_{x\in X}$. Alors, pour tout $g \in G$, on a

$$\begin{aligned}\chi_{V_X}(g) &= \mathrm{Tr}(\rho_X(g)) \\ &= \sum_{x\in X} e_x^\star(\rho_X(g)(e_x)) \\ &= \sum_{x\in X} e_x^\star(e_{g\cdot x}) \\ &= \#\{x \in X \mid g \cdot x = x\}.\end{aligned}$$

2. **a)** On sait que

$$V_X^G = \{v \in V_X \mid \forall g \in G, g \cdot v = v\}.$$

Or,

$$g \cdot e_{\mathbb{O}_i} = \sum_{x \in \mathbb{O}_i} e_{g\cdot x} = \sum_{x\in\mathbb{O}_i} e_x = e_{\mathbb{O}_i},$$

donc $e_{\mathbb{O}_i} \in V_X^G$, et donc $\mathrm{vect}((e_{\mathbb{O}_i})_i) \subseteq V_X^G$. Réciproquement, soit $v \in V_X^G$. On écrit $v = \sum_{x\in X} \lambda_x e_x$. Alors, pour tout élément $g \in G$, $g \cdot x = x$ donc $\lambda_{g\cdot x} = \lambda_x$ pour tout

$x \in X$. Autrement dit, si $x, y \in \mathbb{O}_i$ alors $\lambda_x = \lambda_y =: \lambda_{\mathbb{O}_i}$. Donc

$$v = \sum_{x \in X} \lambda_x e_x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{\mathbb{O}_i} \sum_{x \in \mathbb{O}_i} e_x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{\mathbb{O}_i} e_{\mathbb{O}_i} \in \operatorname{vect}((e_{\mathbb{O}_i})_i),$$

d'où l'inclusion réciproque et donc l'égalité.

b) Les $(e_{\mathbb{O}_i})$ forment une famille libre car les (e_i) le sont et car les $\mathbb{O}_i$ forment une partition de X. Ainsi,

$$\dim(V_X^G) = \dim \operatorname{vect}((e_{\mathbb{O}_i})_i) = k.$$

3. On fait agir G sur $X \times X$ par *action diagonale*, c'est à dire que

$$g \cdot (x, y) := (g \cdot x, g \cdot y).$$

Ainsi, pour $g \in G$, par combinatoire,

$$\begin{aligned} \chi_{V_{X \times X}}(g) &= \#\{(x, y) \in X \times X \mid g \cdot (x, y) = (x, y)\} \\ &= (\#\{x \in X \mid g \cdot x = x\})^2 \\ &= \big(\chi_{V_X}(g)\big)^2. \end{aligned}$$

4. Soit $D := \{(x, x) \mid x \in X\}$. C'est une orbite de l'action de G sur $X \times X$ par transitivité de l'action $G \curvearrowright X$. Ainsi, on a la chaîne d'équivalences suivante :

$$G \curvearrowright X \times X \text{ admet deux orbites}$$

$$\Updownarrow$$

$$(X \times X) \setminus D \text{ est une orbite}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall x_1 \neq y_1, x_2 \neq y_2, \exists g \in G, g \cdot (x_1, x_2) = (x_2, y_2),$$

d'où l'équivalence.

5. On ré-écrit les propriétés étudiées :

(*i*) G agit deux fois transitivement sur X ;
(*ii*) $\langle \chi_{V_X}^2, \mathbb{1} \rangle = 2$;
(*iii*) H irréductible.

▷ « (*i*) $\implies$ (*ii*) »

$$\langle \chi_{V_X}^2, \mathbb{1} \rangle = \langle \chi_{V_{X\times X}}, \mathbb{1} \rangle = \frac{1}{G} \sum_{g\in G} \overline{\chi_{V_X}(g)}$$
$$= \overline{\dim(V_{X\times X}^G)} = \dim(V_{X\times X}^G).$$

Table des matières