Table de caractères.

1 Exercice 1. *Caractères linéaires*

Soit G un groupe fini.

1. *Si G est abélien, montrer qu'il admet $\#G$ représentations de degré 1 à isomorphisme près.*
2. *En déduire que, dans le cas général, il en admet $[G : \mathrm{D}(G)]$.*

1. On sait que G est abélien. Alors, toutes les représentations irréductibles de G sont de degré 1. Ainsi,

$$\#G = \sum_{V \text{ irréductible}} (\dim V)^2 = \#\{\text{représentations irréductibles}\}.$$

Justifions le « toutes les représentations irréductibles de G sont de degré 1 ». Soit (V, ρ) une représentation irréductible de G. Alors, pour tout $g, h \in G$ alors $\rho(g)\rho(h) = \rho(h)\rho(g)$ et ainsi $\rho(g)$ et $\rho(h)$ sont diagonalisables. Donc elles sont co-diagonalisable. Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de V qui co-diagonalise $\rho(g)$ et donc le premier vecteur de $\mathscr{B}$ engendre une droite propre D pour chaque $\rho(g)$. Et, D est donc stable par tous les $\rho(g)$, c'est donc une sous-représentation de V. Par irréductibilité de V, on a $D = V$ et donc $\dim V = 1$.

2. Le dual de G, noté $G^\star$, est l'ensemble des caractères linéaires. On a vu dans le DM n°1 que $G^\star \cong (G^{\mathrm{ab}})^\star$, où $G^{\mathrm{ab}} := G/\mathrm{D}(G)$. Ainsi, d'après la question 1, on sait que G^{ab} admet exactement $|G^{\mathrm{ab}}|$ caractères linéaires. D'où, $|(G^{\mathrm{ab}})^\star| = |G^{\mathrm{ab}}|$. On en conclut que

$$|G^\star| = [G : \mathrm{D}(G)].$$

2 Exercice 2. *Certaines propriétés des représentations de $\mathfrak{S}_n$.*

Soit $n \geq 2$ un entier.

1. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Justifier que σ et σ^{-1} sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$.*
2. *En déduire que la table de caractère de $\mathfrak{S}_n$ est à valeurs réelles.*

Remarque : On peut même montrer que la table de caractère de $\mathfrak{S}_n$ est toujours à valeurs entières, mais cela nécessite des arguments de théorie des corps du cours d'Algèbre 2.

1. La classe de conjugaison de σ est déterminée par les longueurs des cycles apparaissant dans la décomposition en cycles à supports disjoints (*i.e.* le ***type***). L'inverse d'un p-cycle est un p-cycle par tout $p \in [\![2, n]\!]$ donc σ et σ^{-1} ont même type. On en conclut que σ et σ^{-1} sont conjugués.
2. Pour tout caractère χ, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a
$$\chi(\sigma) = \overline{\chi(\sigma^{-1})} = \overline{\chi(\sigma)},$$
car χ est constant sur les classes de conjugaisons. Ainsi, $\chi(\sigma) \in \mathbb{R}$ et la table de caractères de $\mathfrak{S}_n$ est réelle.

3 Exercice 3. *Table de caractères de $\mathfrak{A}_4$.*

1. *Montrer que $\mathfrak{A}_4$ a 4 classes de conjugaison : l'identité, la classe de $(1\ 2\ 3)$, la classe de $(1\ 3\ 2)$, et les doubles transpositions.*
2. *Montrer que le groupe dérivé de $\mathfrak{A}_4$ est le sous-groupe des doubles transpositions, et en déduire 3 caractères linéaires de $\mathfrak{A}_4$.*
3. *Déterminer la dimension de la dernière représentation irréductible de $\mathfrak{A}_4$ grâce aux propriétés de la représentation régulière.*
4. *En utilisant l'orthogonalité des colonnes, déterminer alors la table de caractère de $\mathfrak{A}_4$.*

1. On connait les classes de conjugaisons dans $\mathfrak{S}_4$, et on regardent celles qui sont dans $\mathfrak{A}_4$. Il faudra après re-vérifier que ces classes de conjugaisons ne se re-découpent pas dans $\mathfrak{A}_4$.

   Dans $\mathfrak{S}_4$, on a

   - $\{\mathrm{id}\} \subseteq \mathfrak{A}_4$;
   - $\{\text{transpositions}\} \not\subseteq \mathfrak{A}_4$;
   - $\{\text{3-cycles}\} \subseteq \mathfrak{A}_4$;
   - $\{\text{bi-transpositions}\} \subseteq \mathfrak{A}_4$;
   - $\{\text{4-cycles}\} \not\subseteq \mathfrak{A}_4$.

   Les classes $\{\mathrm{id}\}$ et $\{\text{bi-transpositions}\}$ ne se re-découpent pas. Cependant, pour les 3-cycles, on les décompose en deux classes : celle de $(1\,2\,3)$ et $(1\,3\,2)$.

   - Les deux permutions ne sont pas conjuguées car, si elles l'étaient, alors il existerait $\sigma \in \mathfrak{A}_4$ telle que

     $$(\sigma(1)\,\sigma(2)\,\sigma(3)) = \sigma\,(1\,2\,3)\,\sigma^{-1} = (1\,3\,2).$$

     Et, $\sigma(4) = 4$ donc σ permute $1, 2, 3$. Par $\mathfrak{A}_3$, on en déduit que l'on a $\sigma \in \{\mathrm{id}, (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$. On en conclut que σ et $(1\,2\,3)$ commutent : ***absurde*** car

     $$\sigma\,(1\,2\,3)\,\sigma^{-1} = (1\,2\,3) \neq (1\,3\,2).$$

   - On sait que $\#\mathrm{Cl}_{\mathfrak{A}_4}((1\ 2\ 3)) = \#\mathfrak{A}_4/\#\mathrm{C}_{\mathfrak{A}_4}((1\ 2\ 3))$ (par relation orbite-stabilisateur pour la conjugaison). De plus, on sait que $\#\mathrm{Cl}_{\mathfrak{S}_4}((1\ 2\ 3)) = \#\mathfrak{S}_4/\#\mathrm{C}_{\mathfrak{S}_4}((1\ 2\ 3))$. Ainsi, on a que $\#\mathrm{C}_{\mathfrak{S}_4}((1\,2\,3)) = 3$. On a $\mathrm{C}_{\mathfrak{S}_4}((1\,2\,3)) = \langle(1\,2\,3)\rangle$. Or, $\mathrm{C}_{\mathfrak{A}_4}((1\,2\,3)) = \mathfrak{A}_4 \cap \mathrm{C}_{\mathfrak{S}_4}((1\,2\,3))$. Ainsi, $\#\mathrm{Cl}_{\mathfrak{S}_4}((1\,3\,2)) = 4$.

     Tous les 3-cycles de $\mathfrak{A}_4$ sont répartis dans deux classes de conjugaisons : celle de $(1\,2\,3)$ et celle de $(1\,3\,2)$.

   - Et $\mathfrak{A}_4$ est 2-transitif donc $(1\,2)(3\,4)$ est conjugué à $(a\,b)(c\,d)$ pour tout a, b, c, d distincts avec $\sigma : 1 \mapsto a, 2 \mapsto b$ car

     $$\sigma(1\,2)(3\,4)\sigma^{-1} = \cdots = (a\,b)(c\,d).$$

Donc, les classes de conjugaisons de $\mathfrak{A}_4$ sont :

$$\{\mathrm{id}\} \quad \{\text{classe de } (123)\} \quad \{\text{classe de } (132)\} \quad \text{et} \quad \{\text{bi-transpositions}\}.$$

2. Si $H \lhd G$ et G/H est abélien alors $\mathrm{D}(G) \subseteq H$. Le sous-groupe distingué $V_4 \lhd \mathfrak{A}_4$ est le sous-groupe contenant l'identité et les bi-transpositions. On a $|\mathfrak{A}_4/V_4| = 3$ donc $\mathfrak{A}_4/V_4$ est abélien, d'où on a $\mathrm{D}(\mathfrak{A}_4) \subseteq V_4$. Or, $\mathrm{D}(\mathfrak{A}_4) \lhd \mathfrak{A}_4$ donc c'est une union de classe de conjugaisons. Ainsi $\mathrm{D}(\mathfrak{A}_4) = \{\mathrm{id}\}$ et $\mathrm{D}(\mathfrak{A}_4) = V_4$. Et, puisque $\mathfrak{A}_4$ est non-abélien, alors $\mathrm{D}(\mathfrak{A}_4) \neq \{\mathrm{id}\}$. On en déduit que $\mathrm{D}(\mathfrak{A}_4) = V_4$. On a que $\mathfrak{A}_4$ a $3 = [\mathfrak{A}_4 : V_4]$ caractères linéaires (*c.f.* exercice 1). Un caractère linéaire χ de $\mathfrak{A}_4$ vérifie donc $\chi(V_4) = 1$ et est uniquement déterminé par $\chi(1\,2\,3) \in \{1, \mathrm{j}, \mathrm{j}^2\}$ où $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$.
3. On a que $\#\mathfrak{A}_4 = 12 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2$.
4. On en déduit la table suivante.

4 Exercice 4. *Tables de caractères de D_8 et H_8.*

On va calculer les tables de caractères des groupes D_8 et H_8.

1. *Soit D_8 le groupe diédral d'ordre 8. Il est engendré par deux éléments r et s tels que l'élément r est d'ordre 4, l'élément s est d'ordre 2 et l'égalité $srs^{-1} = r^{-1}$ est vérifiée.*
   - **a)** *Montrer que les classes de conjugaisons de D_8 sont $\{1\}$, $\{r, r^3\}$, $\{r^2\}$ $\{s, sr^2\}$ et $\{sr, sr^3\}$.*
   - **b)** *Montrer que le groupe dérivé de D_8 est $\{1, r^2\}$.*
   - **c)** *En déduire que D_8 a 4 représentations de degré 1, et une irréductible de degré 2, ainsi que la table de caractère de D_8. À quelle action géométrique correspond la représentation irréductible de degré 2 ?*

1.

Table des matières