Produits tensoriels

1 Exercice 1.

Soient E, F et G des espaces vectoriels de dimension finie supérieure à 2.

1. *Donner un élément de $E \otimes F$ qui n'est pas un tenseur simple.*
2. *Donner un exemple d'espaces vectoriels E, F et G et d'application linéaire $h : E \otimes F \to G$ telle que $h(x \otimes y) \neq 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$ et $y \in F \setminus \{0\}$ mais qui n'est pas injective.*
3. *Que se passe-t-il si E ou F est de dimension 1 ?*
4. *Soient $f : E \to G$ et $g : F \to G$ des applications linéaires. Existe-t-il une application linéaire $\varphi : E \otimes F \to G$ telle que pour tout $x \in E$ et $y \in F$ on ait*

$$\varphi(x \otimes y) = f(x) + f(y).$$

1. Considérons (e_1, e_2) une famille libre de E et (f_1, f_2) une famille libre de F. On considère

$$z = e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2 \in E \otimes F.$$

   L'élément z n'est pas simple. Par l'absurde, supposons le simple, et on écrit que $z = x \otimes y$ avec $x \in E$ et $y \in F$. On complète les familles (e_1, e_2) et (f_1, f_2) en deux bases $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $(f_j)_{j \in [\![1,m]\!]}$ de E et F respectivement. On écrit, avec les bases, $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ puis $y = \sum_{j=1}^{m} \mu_j f_j$. Alors $x \otimes y = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (e_i \otimes f_j) = z$. Ceci permet d'en déduire que

$$\lambda_i \mu_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j = 1 \text{ ou } i = j = 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où, $\lambda_1\mu_2 = 0$ et donc $\lambda_1 = 0$ ou $\mu_2 = 0$. Cependant, $\lambda_1\mu_1 = \lambda_2\mu_2 = 1$, ce qui est ***absurde***. Ainsi z n'est pas un tenseur simple.

2. Considérons $\Bbbk = \mathbb{R}$ et $E = F = \mathbb{C}$ vu comme un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension 2. On pose l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto xy, \end{aligned}$$

qui est bilinéaire. Ainsi, par propriété universelle, φ induit une unique application linéaire

$$\begin{aligned} h : \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x \otimes y &\longmapsto xy. \end{aligned}$$

Alors, pour tout $x, y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors $h(x \otimes y) = xy \neq 0$. Or, on a $h(1 \otimes i) = h(i \otimes i)$ et $1 \otimes i \neq i \otimes 1$ donne la non injectivité (car $(1 \otimes 1, i \otimes 1, 1 \otimes i, i \otimes i)$ forme une base de $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$).

3. Si $\dim E = 1$ on écrit $E = \operatorname{vect} e$. Soit $(f_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base de F. Une base de $E \otimes F$ est $(e \otimes f_1, \ldots, e \otimes f_n)$, et

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j (e \otimes f_j) = e \otimes \Big(\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j \Big).$$

Tout élément de $E \otimes F$ est donc un tenseur simple ! Ainsi, l'application

$$\begin{aligned} F &\longrightarrow E \otimes F \\ y &\longmapsto e \otimes y \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

4. Montrons que l'application φ existe et est nécessairement nulle. On a, pour tout $x \in E$ et $y \in F$

$$f(x) = f(x) + 0 = \varphi(x \otimes 0) = 0 = \varphi(0 \otimes y) = g(y) = 0.$$

D'où, $f = 0$ et $g = 0$.

2 Exercice 2. *Isomorphismes canoniques*

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

1. **a)** *Montrer que l'application $E \times F \to F \otimes E$ donnée par $(x, y) \mapsto y \otimes x$ est bilinéaire. En déduire qu'il existe une unique application linéaire*

$$f : E \otimes F \to F \otimes E$$

qui vérifie $f(x \otimes y) = y \otimes x$, pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$.

On construit de même une application linéaire

$$g : F \otimes E \to E \otimes F$$

telle que $g(y \otimes x) = x \otimes y$.

b) *Montrer que $f \circ g = \mathrm{id}_{F \otimes E}$ et $g \circ f = \mathrm{id}_{E \otimes F}$. En particulier, f et g réalisent des isomorphismes entre $E \otimes F$ et $F \otimes E$.*

2.

1. a) L'application

$$\begin{aligned} \varphi : E \times F &\longrightarrow F \otimes E \\ (x, y) &\longmapsto y \otimes x \end{aligned}$$

est linéaire à gauche car $\cdot \otimes \cdot$ est linéaire à droite, et φ est linéaire à droite car $\cdot \otimes \cdot$ est linéaire à gauche. Par propriété universelle, on sait que φ induit une unique application linéaire $f : E \otimes F \to F \otimes E$.

b) Soit $z \in E \otimes F$. On pose $z = \sum_{i=1}^n (x_i \otimes y_i)$ avec $x_i \in E$

et $y_j \in F$. Alors,

$$\begin{aligned}
g(f(z)) &= g\Big(f\Big(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\Big)\Big)\\
&= \sum_{i=1}^n g(f(x_i \otimes y_i))\\
&= \sum_{i=1}^n g(y_i \otimes x_i)\\
&= \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\\
&= z.
\end{aligned}$$

D'où, $g \circ f = \mathrm{id}_{E\otimes F}$. De même, $f \circ g = \mathrm{id}_{F\otimes E}$.

2. Pour $f \in E^*$ et $g \in F^*$, l'application

$$\begin{aligned}
E \times F &\longrightarrow \Bbbk\\
(x, y) &\longmapsto f(x)\ g(y)
\end{aligned}$$

est bilinéaire. Ainsi, par propriété universelle, elle induit une application linéaire

$$\begin{aligned}
P(f, g) : E \otimes F &\longrightarrow \Bbbk\\
x \otimes y &\longmapsto f(x)\ g(y).
\end{aligned}$$

L'application

$$\begin{aligned}
P : E^* \times F^* &\longrightarrow (E \otimes F)^*\\
(f, g) &\longmapsto P(f, g)
\end{aligned}$$

est bilinéaire donc, par propriété universelle, elle induit une unique application linéaire

$$\begin{aligned}
\gamma : E^* \otimes F^* &\longrightarrow (E \otimes F)^*\\
f \otimes g &\longmapsto P(f, g).
\end{aligned}$$

De plus, soit $(e_i)_i$ une base de E et $(f_j)_j$ une base de F. Une base de $(E \otimes F)^*$ est donnée par $((e_i \otimes f_j)^*)_{i,j}$. On vérifie que

$$\gamma(e_i^* \otimes f_j^*) = (e_i \otimes f_j)^*$$

par

$$\gamma(e_i^* \otimes f_j^*)(e_k \otimes f_\ell) = P(e_i^*, f_j^*)(e_i \otimes f_\ell) = e_i^*(e_k) \times f_j^*(f_\ell) = \delta_{i,k} \times \delta_{j,\ell}.$$

Ainsi γ est surjective. On conclut par égalité des dimensions :

$$\dim(E^* \otimes F^*) = \dim(E^*)\dim(F^*) = \dim(E)\dim(F) = \dim(E \otimes F) = \dim((E \otimes F)^*).$$

D'où, γ est un isomorphisme.

3. L'application

$$\begin{aligned} E^* \times F &\longrightarrow \mathrm{Hom}(E, F) \\ (\lambda, y) &\longmapsto (x \mapsto \lambda(x) y) \end{aligned}$$

est bilinéaire, donc par propriété universelle, elle induit Φ.

Une base de $\mathrm{Hom}(E, F)$ est donnée par les $h_{i,j} : x \mapsto e_i^*(x) f_j$. Or, $h_{i,j} = \Phi(e_i^*, f_j)$, donc Φ est surjective.

Enfin, on a

$$\dim(E^* \otimes F) = (\dim E^*)(\dim F) = (\dim E)(\dim F) = \dim(\mathrm{Hom}(E, F)).$$

D'où, Φ est un isomorphisme.

Table des matières