

# Table de caractères.

## 1 Exercice 1. *Caractères linéaires*

Soit  $G$  un groupe fini.

1. Si  $G$  est abélien, montrer qu'il admet  $\#G$  représentations de degré 1 à isomorphisme près.
2. En déduire que, dans le cas général, il en admet  $[G : D(G)]$ .

1. On sait que  $G$  est abélien. Alors, toutes les représentations irréductibles de  $G$  sont de degré 1. Ainsi,

$$\#G = \sum_{V \text{ irréductible}} (\dim V)^2 = \#\{\text{représentations irréductibles}\}.$$

Justifions le « toutes les représentations irréductibles de  $G$  sont de degré 1 ». Soit  $(V, \rho)$  une représentation irréductible de  $G$ . Alors, pour tout  $g, h \in G$  alors  $\rho(g)\rho(h) = \rho(h)\rho(g)$  et ainsi  $\rho(g)$  et  $\rho(h)$  sont diagonalisables. Donc elles sont co-diagonalisables. Alors il existe une base  $\mathfrak{B}$  de  $V$  qui co-diagonalise  $\rho(g)$  et donc le premier vecteur de  $\mathfrak{B}$  engendre une droite propre  $D$  pour chaque  $\rho(g)$ . Et,  $D$  est donc stable par tous les  $\rho(g)$ , c'est donc une sous-représentation de  $V$ . Par irréductibilité de  $V$ , on a  $D = V$  et donc  $\dim V = 1$ .

2. Le dual de  $G$ , noté  $G^*$ , est l'ensemble des caractères linéaires. On a vu dans le DM n°1 que  $G^* \cong (G^{\text{ab}})^*$ , où  $G^{\text{ab}} := G/D(G)$ . Ainsi, d'après la question 1, on sait que  $G^{\text{ab}}$  admet exactement  $|G^{\text{ab}}|$  caractères linéaires. D'où,  $|(G^{\text{ab}})^*| = |G^{\text{ab}}|$ . On en conclut que

$$|G^*| = [G : D(G)].$$

## 2 Exercice 2. *Certaines propriétés des représentations de $\mathfrak{S}_n$ .*

Soit  $n \geq 2$  un entier.

1. Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . Justifier que  $\sigma$  et  $\sigma^{-1}$  sont conjuguées dans  $\mathfrak{S}_n$ .
2. En déduire que la table de caractère de  $\mathfrak{S}_n$  est à valeurs réelles.

*Remarque : On peut même montrer que la table de caractère de  $\mathfrak{S}_n$  est toujours à valeurs entières, mais cela nécessite des arguments de théorie des corps du cours d'Algèbre 2.*

1. La classe de conjugaison de  $\sigma$  est déterminée par les longueurs des cycles apparaissant dans la décomposition en cycles à supports disjoints (*i.e.* le **type**). L'inverse d'un  $p$ -cycle est un  $p$ -cycle par tout  $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$  donc  $\sigma$  et  $\sigma^{-1}$  ont même type. On en conclut que  $\sigma$  et  $\sigma^{-1}$  sont conjugués.
2. Pour tout caractère  $\chi$ , pour toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on a

$$\chi(\sigma) = \overline{\chi(\sigma^{-1})} = \overline{\chi(\sigma)},$$

car  $\chi$  est constant sur les classes de conjugaisons. Ainsi,  $\chi(\sigma) \in \mathbb{R}$  et la table de caractères de  $\mathfrak{S}_n$  est réelle.

## 3 Exercice 3. *Table de caractères de $\mathfrak{A}_4$ .*

1. Montrer que  $\mathfrak{A}_4$  a 4 classes de conjugaison : l'identité, la classe de  $(1\ 2\ 3)$ , la classe de  $(1\ 3\ 2)$ , et les doubles transpositions.
2. Montrer que le groupe dérivé de  $\mathfrak{A}_4$  est le sous-groupe des doubles transpositions, et en déduire 3 caractères linéaires de  $\mathfrak{A}_4$ .
3. Déterminer la dimension de la dernière représentation irréductible de  $\mathfrak{A}_4$  grâce aux propriétés de la représentation régulière.
4. En utilisant l'orthogonalité des colonnes, déterminer alors la table de caractère de  $\mathfrak{A}_4$ .

1. On connaît les classes de conjugaisons dans  $\mathfrak{S}_4$ , et on regarde celles qui sont dans  $\mathfrak{A}_4$ . Il faudra après re-vérifier que ces classes de conjugaisons ne se re-découpent pas dans  $\mathfrak{A}_4$ .

Dans  $\mathfrak{S}_4$ , on a

- ▷  $\{\text{id}\} \subseteq \mathfrak{A}_4$  ;
- ▷  $\{\text{transpositions}\} \not\subseteq \mathfrak{A}_4$  ;
- ▷  $\{\text{3-cycles}\} \subseteq \mathfrak{A}_4$  ;
- ▷  $\{\text{bi-transpositions}\} \subseteq \mathfrak{A}_4$  ;
- ▷  $\{\text{4-cycles}\} \not\subseteq \mathfrak{A}_4$ .

Les classes  $\{\text{id}\}$  et  $\{\text{bi-transpositions}\}$  ne se re-découpent pas. Cependant, pour les 3-cycles, on les décompose en deux classes : celle de  $(1\ 2\ 3)$  et  $(1\ 3\ 2)$ .

- ▷ Les deux permutations ne sont pas conjuguées car, si elles l'étaient, alors il existerait  $\sigma \in \mathfrak{A}_4$  telle que

$$(\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)) = \sigma(1\ 2\ 3)\sigma^{-1} = (1\ 3\ 2).$$

Et,  $\sigma(4) = 4$  donc  $\sigma$  permute 1, 2, 3. Par  $\mathfrak{A}_3$ , on en déduit que l'on a  $\sigma \in \{\text{id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ . On en conclut que  $\sigma$  et  $(1\ 2\ 3)$  commutent : **absurde** car

$$\sigma(1\ 2\ 3)\sigma^{-1} = (1\ 2\ 3) \neq (1\ 3\ 2).$$

- ▷ On sait que  $\#\text{Cl}_{\mathfrak{A}_4}((1\ 2\ 3)) = \#\mathfrak{A}_4/\#\text{C}_{\mathfrak{A}_4}((1\ 2\ 3))$  (par relation orbite-stabilisateur pour la conjugaison). De plus, on sait que  $\#\text{Cl}_{\mathfrak{S}_4}((1\ 2\ 3)) = \#\mathfrak{S}_4/\#\text{C}_{\mathfrak{S}_4}((1\ 2\ 3))$ . Ainsi, on a que  $\#\text{C}_{\mathfrak{S}_4}((1\ 2\ 3)) = 3$ . On a  $\text{C}_{\mathfrak{S}_4}((1\ 2\ 3)) = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$ . Or,  $\text{C}_{\mathfrak{A}_4}((1\ 2\ 3)) = \mathfrak{A}_4 \cap \text{C}_{\mathfrak{S}_4}((1\ 2\ 3))$ . Ainsi,  $\#\text{Cl}_{\mathfrak{S}_4}((1\ 2\ 3)) = 4$ .

Tous les 3-cycles de  $\mathfrak{A}_4$  sont répartis dans deux classes de conjugaisons : celle de  $(1\ 2\ 3)$  et celle de  $(1\ 3\ 2)$ .

- ▷ Et  $\mathfrak{A}_4$  est 2-transitif donc  $(12)(34)$  est conjugué à  $(ab)(cd)$  pour tout  $a, b, c, d$  distincts avec  $\sigma : 1 \mapsto a, 2 \mapsto b$  car

$$\sigma(1\ 2)(3\ 4)\sigma^{-1} = \dots = (a\ b)(c\ d).$$

Donc, les classes de conjugaisons de  $\mathfrak{A}_4$  sont :

$\{\text{id}\}$   $\{\text{classe de } (123)\}$   $\{\text{classe de } (132)\}$  et  $\{\text{bi-transpositions}\}$ .

2. Si  $H \triangleleft G$  et  $G/H$  est abélien alors  $D(G) \subseteq H$ . Le sous-groupe distingué  $V_4 \triangleleft \mathfrak{A}_4$  est le sous-groupe contenant l'identité et les bi-transpositions. On a  $|\mathfrak{A}_4/V_4| = 3$  donc  $\mathfrak{A}_4/V_4$  est abélien, d'où on a  $D(\mathfrak{A}_4) \subseteq V_4$ . Or,  $D(\mathfrak{A}_4) \triangleleft \mathfrak{A}_4$  donc c'est une union de classe de conjugaisons. Ainsi  $D(\mathfrak{A}_4) = \{\text{id}\}$  et  $D(\mathfrak{A}_4) = V_4$ . Et, puisque  $\mathfrak{A}_4$  est non-abélien, alors  $D(\mathfrak{A}_4) \neq \{\text{id}\}$ . On en déduit que  $D(\mathfrak{A}_4) = V_4$ . On a que  $\mathfrak{A}_4$  a  $3 = [\mathfrak{A}_4 : V_4]$  caractères linéaires (c.f. exercice 1). Un caractère linéaire  $\chi$  de  $\mathfrak{A}_4$  vérifie donc  $\chi(V_4) = 1$  et est uniquement déterminé par  $\chi(1\ 2\ 3) \in \{1, j, j^2\}$  où  $j = e^{2i\pi/3}$ .
3. On a que  $\#\mathfrak{A}_4 = 12 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2$ .
4. On en déduit la table suivante.

	id	(1 2 3)	(1 3 2)	(1 2)(3 4)
1	1	1	1	1
$V_j$	1	j	$j^2$	1
$V_{j^2}$	1	$j^2$	j	1
W	3	0	0	-1

Figure 1 | Table de caractères de  $\mathfrak{A}_4$

## 4 Exercice 4. Tables de caractères de $D_8$ et $H_8$ .

On va calculer les tables de caractères des groupes  $D_8$  et  $H_8$ .

1. Soit  $D_8$  le groupe diédral d'ordre 8. Il est engendré par deux éléments  $r$  et  $s$  tels que l'élément  $r$  est d'ordre 4, l'élément  $s$  est d'ordre 2 et l'égalité  $srs^{-1} = r^{-1}$  est vérifiée.
  - a) Montrer que les classes de conjugaisons de  $D_8$  sont  $\{1\}$ ,  $\{r, r^3\}$ ,  $\{r^2\}$   $\{s, sr^2\}$  et  $\{sr, sr^3\}$ .
  - b) Montrer que le groupe dérivé de  $D_8$  est  $\{1, r^2\}$ .

- c) *En déduire que  $D_8$  a 4 représentations de degré 1, et une irréductible de degré 2, ainsi que la table de caractère de  $D_8$ . À quelle action géométrique correspond la représentation irréductible de degré 2 ?*

1.

# Table des matières

	<b>Table de caractères.</b>	<b>1</b>
1	Exercice 1. <i>Caractères linéaires</i> . . . . .	1
2	Exercice 2. <i>Certaines propriétés des représentations</i> <i>de <math>\mathfrak{S}_n</math>.</i> . . . . .	2
3	Exercice 3. <i>Table de caractères de <math>\mathfrak{A}_4</math>.</i> . . . . .	2
4	Exercice 4. <i>Tables de caractères de <math>D_8</math> et <math>H_8</math>.</i> . . . . .	4