

Groupe symétrique

1 Exercice 1.

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_9$. Déterminer sa décomposition canonique en produit de cycles disjoints, son ordre, sa signature, une décomposition en produit de transposition ainsi que σ^{100} .

On a $\sigma = (1 \ 4 \ 7 \ 8)(2 \ 6 \ 5)(3 \ 9)$. Son ordre est le PPCM des ordres précédent, c'est donc 12. Sa signature est $(-1) \times 1 \times (-1) = 1$. On décompose en produit de transposition chaque cycle et on conclut. On calcule

$$\sigma^{100} = (1 \ 4 \ 7 \ 8)^{100} (2 \ 6 \ 5)^{100} (3 \ 9)^{100},$$

car les cycles à supports disjoints commutent, et donc

$$\sigma^{100} = (2 \ 6 \ 5).$$

2 Exercice 2. Générateurs de \mathfrak{A}_n

Soit $n \geq 3$.

1. Rappeler pourquoi \mathfrak{A}_n est engendré par les 3-cycles.
2. Démontrer que \mathfrak{A}_n est engendré par les carrés d'éléments de \mathfrak{S}_n . Est-ce que tout élément de \mathfrak{A}_n est un carré dans \mathfrak{S}_n ?
3. Démontrer que pour $n \geq 5$, \mathfrak{A}_n est engendré par les bitranspositions.
4. Démontrer que \mathfrak{A}_n est engendré par les 3-cycles de la forme $(1 \ 2 \ i)$ pour $i \in \llbracket 3, n \rrbracket$.

5. En déduire que si $n \geq 5$ est impair, alors \mathfrak{A}_n est engendré par les permutations $(1\ 2\ 3)$ et $(3\ 4\ \dots\ n)$ et que si $n \geq 4$ est pair, alors \mathfrak{A}_n est engendré par $(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 2)(3\ 4\ \dots\ n)$.
1. On utilise le fait que tout $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ se décompose comme produit d'un nombre pair de transpositions. Puis, on utilise les égalités
- ▷ $(i\ j)(i\ k) = (i\ j\ k)$,
 - ▷ $(i\ j)(i\ j) = \text{id}$,
 - ▷ $(i\ j)(k\ \ell) = (i\ \ell\ k)(i\ j\ k)$,
- pour déterminer un produit de 3-cycles égal à σ .
2. On utilise la question précédente. Soit $(a\ b\ c)$ un 3-cycle. On a alors $(a\ b\ c)^4 = (a\ b\ c)$, et donc $\sigma = (a\ b\ c)^2$. Ceci permet d'en déduire que les carrés de permutations engendrent \mathfrak{A}_n .

3 Exercice 3.

Soit $n \leq 5$. Démontrer que deux permutations de \mathfrak{S}_n sont conjuguées si et seulement si elles ont même ordre et même signature. Vérifier que c'est faux si $n = 6$.

Table des matières

Groupe symétrique	1
1 Exercice 1.	1
2 Exercice 2. <i>Générateurs de \mathfrak{A}_n</i>	1
3 Exercice 3.	2