Hugo SALOU DM n° 2 Algorithmique 2.

Exercice 1. Calcul accéléré de couplage maximum dans les bipartis.

Q1. Les chemins $P_1, \dots, P_k$ sont sommets-disjoints donc arêtes-disjoints. Ainsi,

$$M' := M \oplus (P_1 \cup \dots \cup P_k) = M \oplus P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_k.$$

Il reste à remarquer que P_i est $(M \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_{i-1})$-améliorant, pour $i \in [\![1, k]\!]$.
En effet, comme les arêtes des P_j sont disjointes, on n'a pas d'inversion "dans P_i" et "hors P_i" en faisant les calculs de $M \oplus \dots P_{i-1}$.

D'où, de "proche en proche", $M \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_i$ est un couplage.

Le cardinal de M' est $|M| + k$. En effet,

$$|M \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_i| = 1 + |M \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_{i-1}|.$$

Q2. Considérons $H = M^* \oplus M$. Dans ce graphe, les sommets ont degré ≤ 2 (car dans M/M^*, ils sont de deg ≤ 1). Ainsi, les composantes connexes de H sont :
- des chemins alternants
  - ↳ M-améliorants,
  - ↳ M-dégradant,
  - ↳ avec autant d'arêtes dans M que M^* (i.e. de l° paire)
- des cycles alternés de l° paire.

Retirer un chemin/cycle de l° paire n'affecte pas $|M^*| - |M|$.
Or, $|M^*| - |M| \geq 0$, donc il doit y avoir plus de chemins M-améliorants que de M-dégradants. Ces chemins sont sommets disjoints car sur des comp. connexes distinctes.

D'où, par le cardinal de Q1, il doit nécessairement avoir Δ chemins M-améliorants tels que

$$|M^*| = |M| + \Delta.$$

En effet, considérer un chemin M-dégradant diminuerait le cardinal de 1.

D'où il existe $|M^*| - |M|$ chemins M-améliorants dans G (sommets disjoints).

Q3. Par maximalité des $\{P_1, \dots, P_k\}$, il n'existe pas de chemin M-augmentant de l° l qui sont disjoints des $\{P_1, \dots, P_k\}$.

Ainsi, tout chemin M'-améliorant doit donc :

- ou bien réutiliser des sommets déjà dans les (P_i) $\Rightarrow$ ne peut pas être de $l^{\circ} \leq l$
- ou bien être disjoint des P_i, absurde car la famille (P_i) ne serait plus maximale avec $P \oplus (P_1 \cup \cdots \cup P_k)$.

D'où $l(P) > l$.

Q4. Chaque chemin M-améliorant utilise au moins $l+1$ sommets.
Et, $|M^*| - |M| \leq$ # chemins M-améliorants sommets disjoints.
D'où, $\underbrace{(|M^*| - |M|) \cdot (l+1)}_{\#\text{sommets d'un ensemble de chemins M-améliorants sommets-disjoints}} \leq |V|$.

On en déduit $|M^*| \leq |M| + |V| / (l+1)$.

Q5. Posons $n := |V|$. Au bout de la $\sqrt{n}$-ième itération, on a $l \geq \sqrt{n}$ d'où

$$|M^*| - |M| \leq \frac{n}{\sqrt{n}+1} < \sqrt{n}.$$

Il reste donc au plus $\sqrt{n}$ itérations après la $\sqrt{n}$-ième car chaque itération fait décroître d'au moins 1 $|M^*| - |M|$.

D'où un nombre de tours de boucle $\leq 2 \cdot \sqrt{n}$.

Q6. On oriente G en $\vec{G}$: si $xy \in E$, $x \in X$, $y \in Y$ alors
si $xy \in M$, on oriente en $(x, y) \in \vec{E}$
sinon on oriente en $(y, x) \in \vec{E}$.
et on ajoute ω à $\vec{V}$ et $(\omega, x) \in \vec{E}$ $\forall x \in X$

Algorithme :
1. Calculer $\vec{G}$ en $O(|E| + |V|)$
2. Lancer un BFS depuis le sommet ω.
3. Lorsqu'on arrive à un sommet dans Y, — test en $O(1)$.
   on stoppe le parcours dans la branche, on ajoute le chemin $\omega \to \cdots \to y \in Y$ et on pose $l := l^{\circ}(\omega - \text{sommet})$ dans la branche actuelle
4. Si on dépasse le niveau l, on arrête.
5. Retourner l'ensemble des chemins calculés.

Proposition. L'algorithme calcule un ensemble maximal (pour $\subseteq$) de chemins M-améliorants sommets-disjoints de l° minimale, en $O(|V| + |E|)$.

preuve.

- maximalité pour $\subseteq$, par l'absurde on aurait dû le considérer dans le BFS, absurde par construction du BFS.
- minimalité de l : par propriété des BFS
- M-améliorants : par construction de $\vec{G}$.
- sommets disjoints : on ne revisite pas de noeuds avec le BFS.
- complexité : c'est un BFS et l'intérieur est en $O(1)$.

$\square$

Q7. La complexité est en $O(|V|^{3/2} + |E|\sqrt{|V|})$, par Q5 et Q6.

La correction est assurée par Q1, et car, si $P = \emptyset$ alors $|M| = |M^*|$ par Q2 (contraposée).

Exercice 2. Cannes 2025.

Un reporter peut aller de E_i à E_j ssi :

$$T_i + t_i + \tau_{i,j} \leq T_j.$$

On considère le DAG $\vec{G} = (V, \vec{E})$ où

$$V = \{E_1, \dots, E_n\},$$
$$\vec{E} = \{(E_i, E_j) \mid T_i + t_i + \tau_{i,j} \leq T_j\}.$$

Un chemin dans $\vec{G}$ représente un reporter. On cherche donc la couverture minimale par chemins sommets-disjoints.

On a $\#$ min reporter $= n - \#$ max couplage H (preuve dans la suite)

où H est construit comme $(\underbrace{V_1 \sqcup V_2}_{\text{deux copies de } V}, A)$

$$A := \{ v_1 v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, v_1 v_2 \in \vec{E} \}.$$

On sépare les niveaux pairs et impairs. Soit M un couplage maximum pour H.

1. Toute collection de chemins disjoints dans $\vec{G}$ couvre au moins $|M|$ arêtes dans H.
   En effet, chaque sommet correspond à exactement un chemin, donc :

- toute arête $u \xrightarrow[G]{} v$ correspond à $u_1 v_2 \in A$.
- ces arêtes sont disjointes.

D'où, elles forment un couplage dans H.
S'il y a k chemins dans la couverture, alors on couvre $n-k$ arêtes.
Ainsi, $|M| \leq n-k \iff k \geq n-|M|$

2. Construisons une collection de $n-|M|$ chemins disjoints couvrant tous les sommets.

Soit $G_M := (V, \vec{E}_M)$ où $\vec{E}_M := \{ uv \mid u_1 v_2 \in M \}$.

Chaque sommet de G_M a $\deg^+ \leq 1$ et $\deg^- \leq 1$.
Les composantes connexes de G_M sont des chaînes (s'il y avait un cycle, il induirait un cycle dans G absurde !). (On suppose ici que les événements durent individuellement plus que 0 minutes !!).

On construit alors la collection des $n-|M|$ chemins de G en ajoutant les sommets isolés dans G_M (des chemins de taille 1).

On a montré $\#$ reporters $= n - \#$max couplage H.

Algorithme :

1. Calculer H // $O(n^2)$
2. Calculer un couplage max M dans H // $O(n^{3/2})$ avec exo 1.
3. On retourne $n-|M|$

Proposition : L'algorithme renvoie le nombre minimal de reporters en $O(n^{3/2})$.
preuve. Correction : okay par résultat précédent
Complexité : okay par exo 1 & construction de H ($|A| = O(n^2)$ et ce $O(n^2)$ est atteint).

□