

TD n°3

Théorie des catégories

Hugo SALOU
Dept. Informatique



19 décembre 2024

Table des matières

Exercice 1.	3
Exercice 2.	4
Exercice 3.	6
Exercice 4.	7
Exercice 5.	10
Exercice 6.	12
Exercice 7.	14
Exercice 8.	16
Exercice 10.	22
Exercice 11.	24
Exercice 12.	25

Exercice 1.

Montrer que si un foncteur est un adjoint à droite (resp. à gauche) alors il est continue (resp. cocontinue).

Soit $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ un foncteur possédant un adjoint à gauche que l'on notera $G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$. Ainsi, on sait que $\text{Hom}(-, G-) \cong \text{Hom}(F-, -)$.

Considérons un petit diagramme $J : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$. Ainsi, on a la chaîne d'isomorphisme :

$$\begin{aligned} \text{Hom}(A, G(\lim J)) &\cong \text{Hom}(FA, \lim J) && \text{par adjoint} \\ &\cong \lim \text{Hom}(FA, J) && \text{par continuité (TD2)} \\ &\cong \lim \text{Hom}(A, GJ) && \text{par adjoint} \\ &\cong \text{Hom}(A, \lim GJ) && \text{par continuité (TD2)}, \end{aligned}$$

pour tout $A \in \mathbf{C}_0$. Ceci étant vrai quel que soit A , on a donc l'isomorphisme $\mathcal{Y}(G(\lim J)) \cong \mathcal{Y}(\lim GJ)$.

Par le lemme de Yoneda, on en déduit que $G(\lim J) \cong \lim GJ$. On a donc bien la continuité d'un foncteur possédant un adjoint à gauche, *i.e.* d'un foncteur qui est à un adjoint à droite.

Par dualité, on a bien le résultat pour les foncteurs possédant un adjoints à droite.

Exercice 2.

Montrer que si $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ est une équivalence de catégories et $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ est un quasi-inverse de F , alors F est adjoint à gauche à G et G est aussi adjoint à gauche à F .

On veut construire l'isomorphisme

$$\alpha : \text{Hom}(-, G-) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(F-, -).$$

On sait qu'il existe deux isomorphismes naturels

$$\theta : \text{id}_{\mathbf{D}} \Rightarrow F \circ G \quad \text{et} \quad \eta : \text{id}_{\mathbf{C}} \Rightarrow G \circ F.$$

Considérons $(f : A \rightarrow GB) \in \text{Hom}(-, G-)$, et on veut construire une flèche de la forme $\alpha_{A,B}(f) : FA \rightarrow B$. On considère le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 A & & FA \\
 \downarrow f & \xrightarrow{\quad F \quad} & \downarrow Ff \\
 GB & & F(GB)
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{\quad F \quad} \\
 \xrightarrow{\quad \theta_B^{-1} \quad}
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 & & B \\
 & \swarrow \alpha_{A,B}(f) & \\
 & & \downarrow \theta_B^{-1}
 \end{array}
 ,$$

et on pose $\alpha_{A,B}(f) := \theta_B^{-1} \circ (Ff)$. Ceci donne donc un isomorphisme

$$\alpha_{A,B} : \text{Hom}(A, GB) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(FA, B).$$

En effet, l'inverse est $\beta_{A,B} : g \mapsto (Gg) \circ \eta_A$ comme le montre le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 FA & & G(FA) \xleftarrow{\eta_A} A \\
 \downarrow g & \xrightarrow{\quad G \quad} & \downarrow Gg \\
 B & & GB
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \nearrow \beta_{A,B}(f) \\
 \cdot
 \end{array}$$

Ceci démontre ainsi que l'on a deux isomorphismes naturels

$$\alpha : \text{Hom}(-, G-) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(F-, -)$$

$$\beta : \text{Hom}(F-, -) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(-, G-).$$

démontrant ainsi que F et G sont adjoints à gauche de G et à droite de F respectivement.

Exercice 3.

On montre que les limites dans $\mathbf{Psh}(\mathbf{C}) := [\mathbf{C}^{\text{op}}, \mathbf{Ens}]$ existent et se calculent point par point. Soit $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{Psh}(\mathbf{C})$ un diagramme. On rappelle que F se voit comme \hat{F} de $[\mathbf{J} \times \mathbf{C}^{\text{op}}, \mathbf{Ens}]$. Vu que \mathbf{Ens} est complet, montrer que $\varprojlim F$ existe et vaut en X :

$$(\varprojlim F)(X) \cong \varprojlim \hat{F}(-, X),$$

ou écrite de façon plus suggestive,

$$(\varprojlim P_{\bullet})(X) \cong \varprojlim P_{\bullet}(X),$$

avec $P_{\bullet} = F$ (modulo curryfication). Quel est l'énoncé dual ?

Comme \mathbf{Ens} est complet, la limite $\varprojlim \hat{F}(-, X)$ existe et on note alors $\{\phi_{A,X} : \varprojlim \hat{F}(-, X) \rightarrow \hat{F}(A, X)\}$ le cône limite. De plus, on a que

$$(\varprojlim F)(Y) = \{\psi_X : \varprojlim (F-)(Y) \rightarrow (FX)Y\}.$$

Et, par curryfication, on a que

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim (F-)(Y) & \xrightarrow[\sim]{\text{curryfication}} & \varprojlim \hat{F}(-, Y) \\ \downarrow \phi_X & & \downarrow \psi_X \\ (FX)Y & \xrightarrow[\sim]{\text{curryfication}} & \hat{F}(X, Y). \end{array}$$

Ceci implique l'isomorphisme

$$(\varprojlim F)(X) \cong \varprojlim \hat{F}(-, X).$$

L'énoncé dual est que $\varinjlim F$ existe (car \mathbf{Ens} est co-complet) et peut se calculer point par point avec :

$$(\varinjlim F)(X) \cong \varinjlim \hat{F}(-, X).$$

Exercice 4.

1. On rappelle que pour $f : A \rightarrow B$ une fonction, on peut définir le foncteur $f^{-1} : \wp B \rightarrow \wp A$ entre catégories posétales. Montrer qu'il admet un adjoint à gauche (bien connu) et un adjoint à droite (à construire).

2. En déduire que

$$\begin{aligned} \triangleright f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) &= \bigcup_{i \in I} f(A_i); \\ \triangleright f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) &= \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i); \\ \triangleright f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) &= \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i); \end{aligned}$$

3. Pourquoi f n'a-t-il pas d'adjoint à gauche?

1. On pose le foncteur image directe, noté $f : \wp A \rightarrow \wp B$. Parce que

$$f(S) \subseteq T \iff S \subseteq f^{-1}(T),$$

quels que soient S et T , on sait donc que f est adjoint à gauche de f^{-1} . Pour l'adjoint à droite, il faut construire un foncteur de la forme $R : \wp A \rightarrow \wp B$ vérifiant l'équivalence

$$S \subseteq R(T) \iff f^{-1}(S) \subseteq T,$$

quels que soient S et T .

On pose

$$R(T) := f(A) \setminus f(A \setminus T),$$

et on a bien l'équivalence demandée.

En effet, si $S \subseteq R(T)$ alors $S \subseteq f(A) = \text{im } f$ et $S \cap f(A \setminus T) = \emptyset$. Ceci implique que $f^{-1}(S) \cap f^{-1}(f(A \setminus T)) = \emptyset$ et donc que l'on

ait $f^{-1}(S) \cap (A \setminus T) = \emptyset$ (car $f^{-1}(f(A \setminus T)) \supseteq A \setminus T$). On en déduit que $f^{-1}(S) \subseteq T$

Réciproquement, si $f^{-1}(S) \subseteq T$, c'est alors que l'on ait $S \subseteq \text{im } f$ et que $S \cap f(A \setminus T) = \emptyset$. On en déduit que $S \subseteq R(T)$.

Ceci permet de conclure que l'on a bien construit un adjoint à droite du foncteur f^{-1} .

2. On applique l'exercice 1. En effet, l'union est la limite du diagramme discret (que l'on notera A_I par la suite) dans la catégorie posétale $\wp X$ (pour X un ensemble quelconque) et la colimite est l'intersection.

▷ On a

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = f(\lim A_I) = \lim f(A_I) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$$

car le foncteur f est continu comme adjoint à droite de f^{-1} .

▷ On a

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = f^{-1}(\lim A_I) = \lim f^{-1}(A_I) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$$

car le foncteur f^{-1} est continu comme adjoint à droite du foncteur R .

▷ On a

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = f^{-1}(\text{colim } A_I) = \text{colim } f^{-1}(A_I) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i)$$

car le foncteur f^{-1} est cocontinu comme adjoint à gauche du foncteur f .

3. Supposons que f admette un adjoint à gauche, alors f donc un adjoint à droite, et ainsi il est continu. En particulier, on a l'égalité $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$. Sauf que c'est faux ! On considère

par exemple le cas $A = B = \llbracket 1, 3 \rrbracket$ muni de l'application

$$\begin{aligned} f : \llbracket 1, 3 \rrbracket &\longrightarrow \llbracket 1, 3 \rrbracket \\ 1 &\longmapsto 1 \\ 2 &\longmapsto 2 \\ 3 &\longmapsto 1 \\ &\cdot \end{aligned}$$

Ainsi pour $A_1 = \{1, 2\}$ et $A_2 = \{2, 3\}$, on a

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\{2\}) = \{2\} \quad \text{mais} \quad f(A_1) \cap f(A_2) = \{1, 2\}.$$

En général, f n'admet pas d'adjoint à gauche.¹

1. À moins que f soit injective, auquel cas $f^{-1}(S) \subseteq T \iff S \subseteq f(T)$ car l'image réciproque $f^{-1}(S)$ ne contient que les images de S et rien d'autre.

Exercice 5.

Montrer qu'une transformation naturelle $\alpha : P \Rightarrow Q$ est un monomorphisme dans $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})$ si et seulement si chaque composante $\alpha_X : P(X) \rightarrow Q(X)$ l'est. Quel est l'énoncé dual ?

Indice. Utiliser le lemme de Yoneda dans le sens difficile.

On procède en deux temps.

Considérons η et γ comme indiqué dans le diagramme

$$O \begin{array}{c} \xrightarrow{\eta} \\ \xrightarrow{\gamma} \end{array} P \xrightarrow{\alpha} Q .$$

On sait que $\eta = \gamma$ si et seulement si $\eta_X = \gamma_X$ pour tout $X \in \text{ob}(\mathbf{C})$ (et de même pour $\alpha \circ \eta, \alpha \circ \gamma$). Supposons que $\alpha \circ \eta = \alpha \circ \gamma$, et que chaque α_X est un monomorphisme. Ainsi, $\alpha_X \circ \eta_X = \alpha_X \circ \gamma_X$ par définition de la composition et donc $\eta_X = \gamma_X$ quel que soit X .

$$OX \begin{array}{c} \xrightarrow{\eta_X} \\ \xrightarrow{\gamma_X} \end{array} PX \xrightarrow{\alpha_X} QX .$$

On en déduit $\eta = \gamma$ et ainsi que α est un monomorphisme.

Pour l'autre sens, le sens difficile, on suppose que $\alpha : P \Rightarrow Q$ est un monomorphisme. Fixons un X quelconque. On applique le lemme de Yoneda qui donne une transformation naturelle

$$\tau : \text{Ev}(-, X) \xrightarrow{\sim} \text{Nat}(\mathcal{Y}(X), -),$$

où l'on a noté $\text{Ev}(F, X)$ le bifoncteur d'évaluation. Ainsi, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} PX & \xrightarrow{\alpha_X} & QX \\ \wr \downarrow \tau_P & & \wr \downarrow \tau_Q \\ \text{Nat}(\mathcal{Y}(X), P) & \xrightarrow{-\circ\alpha} & \text{Nat}(\mathcal{Y}(X), Q) \end{array}$$

commute. Et, si α est un monomorphisme alors $-\circ\alpha$ l'est aussi et il en va de même pour

$$\tau_Q^{-1} \circ (-\circ\alpha) \circ \tau_P,$$

par composition de monomorphismes (isomorphisme implique monomorphisme).

On en déduit que α_X est un monomorphisme, et ce quel que soit X . D'où l'équivalence.

L'énoncé dual est

« une transformation naturelle $\alpha : P \Rightarrow Q$ est un épimorphisme dans $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})^{\text{op}}$ si et seulement si chaque composante $\alpha_X : PX \rightarrow QX$ l'est ».

Exercice 6.

1. Montrer que $\varphi : A \mapsto \varphi(A)$ et $f \mapsto \tilde{f}$ (où \tilde{f} est l'image directe) n'est pas représentable.
2. Choisir une catégorie d'objet mathématique avec un foncteur d'oubli vers **Ens** et montrer qu'il est représentable (ou sinon, pourquoi il ne l'est pas). Les exemples du cours ne sont pas autorisés.

1. Par l'absurde supposons le représentable. Ainsi, il existe A un ensemble tel que $\varphi - \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(A, -)$.

Considérons un ensemble fini B de cardinal m . Notons n le cardinal de A (potentiellement infini, cela ne posera pas problème s'il l'est). On a ainsi

$$\begin{array}{ccccccc}
 2^m & = & \text{card } \varphi(B) & = & \text{card Hom}(A, B) & = & (\text{card } B)^{\text{card } A} = m^n, \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \text{dénombrément} & & \text{isomorphisme} & & \text{dénombrément} & &
 \end{array}$$

ce qui est faux pour un ensemble arbitraire B de cardinal m .

2. On considère la catégorie des monoïdes **Mon** muni des morphismes de monoïdes. Le foncteur d'oubli $U : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est défini par :

- ▷ à un monoïde (M, \cdot, ϵ) on associe M l'ensemble sous-jacent ;
- ▷ à un morphisme $u : (M, \cdot, \epsilon) \rightarrow (N, \diamond, \varepsilon)$ on associe l'application $\hat{u} : M \mapsto N, x \mapsto u(x)$ la fonction sous-jacente.

On représente un tel foncteur d'oubli par le monoïde libre que l'on notera $(\{1\}^*, \cdot, \varepsilon)$. (Un monoïde libre sur X est l'ensemble

des mots sur l'alphabet X donné.) L'ensemble $\{1\}^*$ est ainsi égal à

$$\{1\}^* = \{1^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

L'opération \cdot correspond à la concaténation usuelle des mots ($1^n \cdot 1^m = 1^{n+m}$ en est une conséquence), et ε correspond au mot vide ($\varepsilon = 1^0$ est aussi une conséquence).

Le monoïde libre sur $\{1\}$ est isomorphe à $(\mathbb{N}, +, 0)$ mais cette construction n'est plus vraie pour des alphabets plus grands (*c.f.* théorie des langages).

Construisons l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mon}}((\{1\}^*, \cdot, \varepsilon), (N, \diamond, \epsilon)) \cong N = U(N).$$

On définit

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mon}}((\{1\}^*, \cdot, \varepsilon), (N, \diamond, \epsilon)) &\longrightarrow N \\ (u : \{1\}^* \rightarrow N) &\longmapsto u(1). \end{aligned}$$

C'est bien un isomorphisme :

- ▷ *injectivité*, si $f, g : \{1\}^* \rightarrow N$ vérifient $f(1) = g(1)$ mais par morphisme de monoïde, on a que $f(1^n) = f(1)^n = g(1)^n = g(1^n)$ et les $(1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ engendrent le monoïde libre (il n'y a rien de plus en réalité), donc $f = g$;
- ▷ *surjectivité*, pour un élément $x \in N$ on pose le morphisme u défini par $u(1^n) := x^n$, il vérifie bien que $u(1) = x$, d'où la surjectivité.

On en conclut quant à la représentabilité du foncteur d'oubli sur les monoïdes $U : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Ens}$.

Exercice 7.

Dans une catégorie posétale admettant tout produit fini (dite « cartésienne »), on appelle (s'il existe) l'exponentiation par X le foncteur $(-)^X$ (s'il existe) adjoint à gauche de

$$\begin{aligned} - \times X &: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} \\ A &\longmapsto A \times X \\ (f : A \rightarrow B) &\longmapsto (f \times \text{id}_X : A \times X \rightarrow B \times X). \end{aligned}$$

1. Décrire l'exponentiation dans **Ens**.
2. Montrer que dans une catégorie admettant tout objet exponentiel $(A^B)^C \cong A^{B \times C}$.
3. Dans une catégorie admettant tout produit fini et tout objet exponentiel (c'est à dire « clos cartésien ») montrer que si de plus \mathbf{C} est localement petite et contient les coproduits alors

$$A \times (B + C) \cong A \times B + A \times C.$$

1. Montrons que dans **Ens**, l'exponentiation $(-)^X$ correspond au foncteur $\text{Hom}(X, -)$. Soient A, B, X trois ensembles. On a donc l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Hom}(A, \text{Hom}(X, B)) &\longrightarrow \text{Hom}(A \times X, B) \\ (f : A \rightarrow \text{Hom}(X, B)) &\longmapsto \left(\begin{array}{ccc} g : (A \times X) & \rightarrow & B \\ (a, x) & \mapsto & f(a)(x) \end{array} \right), \end{aligned}$$

qui est juste une curryfication. D'où $\text{Hom}(X, -)$ est adjoint à gauche de $- \times X$. On en déduit que dans **Ens** l'exponentiation existe toujours et qu'il vaut $\text{Hom}(X, -) \cong (-)^X$.

2. Soient X, A, B, C des objets. On a la chaîne d'isomorphisme suivante :

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}(X, (A^B)^C) &\cong \text{Hom}(X \times C, A^B) && \text{par adjoint} \\
 &\cong \text{Hom}((X \times C) \times B, A) && \text{par adjoint} \\
 &\cong \text{Hom}(X \times (C \times B), A) && \text{par TD2 (ex1)} \\
 &\cong \text{Hom}(X \times (B \times C), A) && \text{par TD2 (ex1)} \\
 &\cong \text{Hom}(X, A^{B \times C}) && \text{par adjoint.}
 \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{Y}((A^B)^C) \cong \mathcal{Y}(A^{B \times C})$. D'où, $(A^B)^C \cong A^{B \times C}$ par le lemme de Yoneda.

3. Le foncteur $A \times -$ admet un adjoint à gauche (justification?). Il est donc co-continu (exercice 1).

Considérons $F : \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{C}$ le diagramme discret donné ci-dessous

$$\begin{array}{ccc}
 \text{id}_B & & \text{id}_C \\
 \cap & & \cap \\
 B & & C .
 \end{array}$$

On a la chaîne d'isomorphismes suivante :

$$\begin{aligned}
 A \times (B + C) &\cong A \times (\text{colim } F) \\
 &\cong \text{colim}(A \times F) \\
 &\cong A \times B + A \times C,
 \end{aligned}$$

car le diagramme $A \times F$ est :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{id}_{A \times B} & & \text{id}_{A \times C} \\
 \cap & & \cap \\
 A \times B & & A \times C .
 \end{array}$$

Exercice 8.

On dit qu'une catégorie est *filtrante* si tout diagramme fini admet un cocône.

1. Pourquoi cela généralise la notion d'ordre filtrant (c.f. TD 2) ?

On appelle *(co)limite filtrante* une *(co)limite* indexée par une catégorie filtrante. Dans une catégorie localement petite, on appelle un objet X *compact* dès lors que $h^X := \text{Hom}(X, -)$ commute avec les limites filtrées.

2. Montrer qu'un objet X est compact si et seulement si toute flèche $X \xrightarrow{u} \text{colim } U_i$, pour un diagramme U_\bullet filtrant, se factorise par $X \xrightarrow{f} U_j \xrightarrow{v_j} \text{colim } U_i$.
3. Quels sont les objets compacts de \mathcal{O}_X la catégorie des ouverts munie des inclusions de l'espace topologique X ? (Indice : le nom est bien choisi).
4. Quels sont les objets compacts de **Ens** ?
5. Quels sont les objets compacts de $\mathbf{Vect}_{\mathbb{k}}$?
6. Qu'en est-il de **Grp** ?

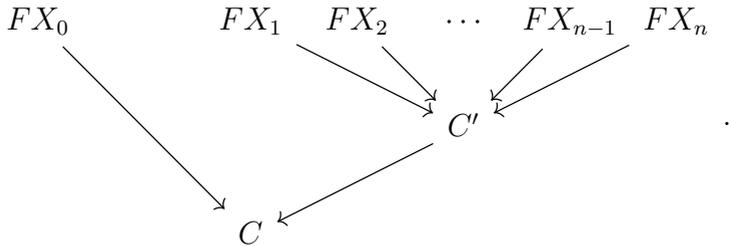
1. Considérons une catégorie posétale \mathbf{C} munie d'un ordre filtrant noté \preceq . Montrons que c'est une catégorie filtrante.

Montrons que tout diagramme fini de cardinal n admet un cocône par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- ▷ Pour $n = 1$, on considère un diagramme F de cardinal 1.
Un cocône de ce diagramme est celui ci-dessous :

$$\begin{array}{c} FX \\ \downarrow \text{id}_{FX} \\ FX \end{array}$$

- ▷ Pour un diagramme F de cardinal $n + 1$, on isole un élément de ce diagramme X_0 et on considère le diagramme F' contenant les n autres éléments. Par hypothèse de récurrence, ce diagramme possède un cocône C' muni des morphismes $\phi'_X : F'X \rightarrow C'$. Parce que \preceq est filtrant, il existe $C \in \mathbf{C}$ tel que $X_0 \preceq C$ et $C' \preceq C$. Le diagramme suivant est donc un cocône sur F :



On en conclut que toute catégorie posétale sur un ordre filtrant est une catégorie filtrante.

2. On procède par équivalence.

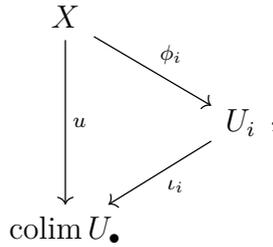
X compact

$$\iff \forall U_{\bullet} \text{ diag. filtrant, } \text{colim } h^X(U_i) \cong h^X(\text{colim } U_i)$$

$$\iff \forall U_{\bullet} \text{ diag. filtrant, } \underbrace{\text{colim Hom}(X, U_i)}_{\{\phi_i : \text{Hom}(X, U_i) \rightarrow N\}} \cong \text{Hom}(X, \text{colim } U_i)$$

$$\iff \forall U_{\bullet} \text{ diag. filtrant, } \forall u : X \rightarrow \text{colim } U_{\bullet}, \exists ! i \in I,$$

le diagramme suivant commute



où l'on a noté $(\iota_i : U_i \rightarrow \text{colim } U_\bullet)$ le cocône limite sur U_\bullet et N la pointe du cocône limite $\text{colim Hom}(X, U_i)$.

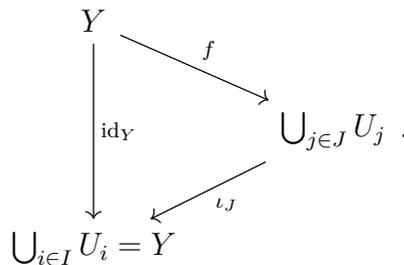
3. Montrons que Y est compact (au sens que chaque couverture par ouvert de Y admet une sous-couverture finie de Y) si et seulement si Y est un objet compact dans \mathcal{O}_X . Je noterai « objet compact » pour la définition catégorique et « compact topologique » pour la définition topologique.

Dans cette catégorie, la colimite correspond à l'union ensembliste. Considérons un recouvrement $\bigcup_{i \in I} U_i = Y$, pour Y quelconque. Le diagramme

$$\begin{aligned}
 K : \mathcal{O}_{\text{finies}}(I) &\longrightarrow \mathcal{O}_X \\
 I \supseteq J &\longmapsto \bigcup_{j \in J} U_j
 \end{aligned}$$

est filtrant (toute famille finie de partie finie admet une union finie) et sa colimite vaut $\bigcup_{i \in I} U_i = Y$.

Ainsi, si Y est un objet compact, alors il existe $J \subseteq I$ fini et f tel que le diagramme suivant commute :



Ceci implique nécessairement que $\bigcup_{j \in J} U_j = Y$ avec J fini. On en conclut que tout recouvrement de Y admet un sous-recouvrement fini, donc que Y est un compact topologique.

Réciproquement, si Y est un compact topologique, et soit $U_\bullet : I \rightarrow \mathcal{O}_X$ un diagramme filtrant quelconque. Montrons l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(Y, \mathrm{colim} U_\bullet) \cong \mathrm{colim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(Y, U_\bullet).$$

L'ensemble à droite est vide si et seulement si $\mathrm{colim} U_\bullet = \bigcup_{i \in I} U_i \subsetneq Y$, et c'est un singleton sinon (argument de continuité). Dans le premier cas, ceci implique que tous les ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(Y, U_i)$ par le même argument et donc $\mathrm{colim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(Y, U_\bullet)$ est vide. Dans l'autre cas, par compacité topologique de Y , on sait que l'on peut extraire un sous-ensemble fini $J \subseteq I$ tel que $Y = \bigcup_{j \in J} U_j$. Et, vu que le diagramme U_\bullet est filtré, alors il existe un cocône sur J , de pointe p . On en déduit que $U_c \supseteq \bigcup_{j \in J} U_j = X$, d'où $U_c = X$. On a donc bien l'isomorphisme demandé.

4. Montrons qu'un ensemble est compact (au sens d'être un objet compact dans **Ens**) si et seulement s'il est fini.

Remarquons que l'union ensembliste est une colimite filtrée, et que pour une famille finie d'ensembles finis, leur union est fini.

Considérons un ensemble compact $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ où les éléments $U_i \subseteq X$ sont des sous-ensembles finis, et où I est une catégorie filtrante. Alors, par la question 2, il existe $i \in I$ et f tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow \mathrm{id}_X & \searrow f & \\ & & U_i \cdot \\ & \swarrow \iota_i & \\ \mathrm{colim} U_\bullet = X & & \end{array}$$

On en déduit que nécessairement $U_i \cong X$, ce qui implique X fini.

Réciproquement, soit $U_\bullet : I \rightarrow \mathbf{Ens}$ un diagramme filtrant quel-

conque. On a l'isomorphisme :

$$\text{Hom}(X, \underbrace{\text{colim } U_\bullet}_{\bigcup_{i \in I} U_i}) \cong \underbrace{\text{colim } \text{Hom}(X, U_\bullet)}_{\bigcup_{i \in I} \text{Hom}(X, U_i)},$$

par les propriétés des applications usuelles sur les ensembles.

5. Considérons un espace vectoriel E . On pose $E = \bigoplus_{i \in I} \text{vect}(e_i)$. On « décompose » ainsi E en somme directe de sous-espaces vectoriels de dimension 1. On note $U_i = \text{vect } e_i$.

Le diagramme

$$\begin{aligned} K : \wp_{\text{finies}}(I) &\longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{k}} \\ J &\longmapsto \bigoplus_{j \in J} U_j, \end{aligned}$$

c'est un diagramme filtrant (la somme d'espace vectoriels existe toujours, et c'est un espace vectoriel) et sa colimite vaut $\bigoplus_{i \in I} U_i = E$.

Ce diagramme filtrant permet la factorisation

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & \bigoplus_{j \in J} U_j \\ \text{id}_E \downarrow & & \swarrow \iota_j \\ E = \bigoplus_{i \in I} U_i & & \end{array}$$

On en déduit que $E = \bigoplus_{j \in J} U_j$ avec J fini, donc que E est de dimension finie.

Réciproquement, si $U_\bullet : I \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{k}}$ est un diagramme filtrant quelconque, où X est fini. Montrons l'isomorphisme

$$\text{Hom}(X, \underbrace{\text{colim } U_\bullet}_{\bigoplus_{i \in I} U_i}) \cong \underbrace{\text{colim } \text{Hom}(X, U_\bullet)}_{\bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(X, U_i)},$$

en décomposant les applications sous chacune de leurs coordonnées (possible car X est fini). D'où la réciproque.

6. Pour **Grp**, on procède quasi-exactement que pour **Vect**_{ℓk}. On décompose un groupe G en $\langle g_i \mid i \in I \rangle$, et on pose le diagramme

$$\begin{aligned} K : \wp_{\text{finies}}(I) &\longrightarrow \mathbf{Grp} \\ J &\longmapsto \langle g_i \mid i \in J \rangle. \end{aligned}$$

On montre, très similairement au raisonnement réalisé dans les précédente question, que G est compact si et seulement si $G = \langle g_i \mid i \in J \rangle$ avec J fini. Autrement dit, G est compact si et seulement s'il est engendré par un nombre fini d'éléments.

Exercice 10.

1. Montrer que $\mathbf{Co} \backslash \mathbb{K} \cong \mathbf{Ext}_{\mathbb{K}}$ où \mathbf{Co} est la catégorie des corps et $\mathbf{Ext}_{\mathbb{K}}$ est la catégorie des extensions \mathbb{L} de \mathbb{K} ayant pour flèches les \mathbb{K} -morphisms de corps.
2. Donner de même une description équivalente de $\mathbf{Ens} \backslash \{*\}$ avec $\{*\}$ un singleton.

1. Une extension d'un corps \mathbb{K} est un couple (\mathbb{L}, ι) où $\iota : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$ est un morphisme de corps. Et, un objet de $\mathbf{Co} \backslash \mathbb{K}$ est un couple (\mathbb{L}, ι) où \mathbb{L} est un corps et $\iota : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$ est un morphisme de corps (car morphisme de \mathbf{Co} .)

On a donc correspondance exacte des objets.

Si on a un morphisme d'extension $u : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}'$, alors u vaut l'identité sur \mathbb{K} (par définition de morphisme d'extensions) et c'est un morphisme de corps. Par ces deux contraintes, le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{K} & \\ \nearrow \iota & & \nwarrow \iota' \\ \mathbb{L} & \xrightarrow{u} & \mathbb{L}' \end{array}$$

Ceci conclut quant à l'isomorphisme des deux catégories.

2. Construisons l'isomorphisme entre les catégories $\mathbf{Ens} \backslash \{*\}$ et $\mathbf{Ens}_{\mathfrak{p}}$

où \mathbf{Ens}_p est la catégorie des espaces pointés :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Ens} \setminus \{*\} &\xrightarrow{\sim} \mathbf{Ens}_p \\
 (A, \pi : \{*\} \rightarrow A) &\longmapsto (A, \pi(*)) \\
 (A, \pi : * \mapsto p) &\longleftarrow (A, p) \\
 ((A, \pi) \xrightarrow{u} (A', \pi')) &\longmapsto ((A, \pi(*)) \xrightarrow{u} (A', \pi'(*))) \\
 u \circ \pi &= \pi' & u(\pi(*)) &= \pi'(*) \\
 ((A, \pi : * \mapsto p) \xrightarrow{u} (A', \pi' : * \mapsto p')) &\longleftarrow ((A, p) \xrightarrow{u} (A', p)) \\
 u \circ \pi &= \pi' & u(p) &= p'.
 \end{aligned}$$

Exercice 11.

Soient \mathbf{C} une petite catégorie, \mathbf{E} une catégorie, et $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{E}$ un diagramme tel que $\lim_{\mathbf{C}} F$ existe. Montrer que la catégorie des cônes sur F est isomorphe à la catégorie relative à $\lim_{\mathbf{C}} F$. Si $\operatorname{colim}_{\mathbf{C}} F$ existe, énoncer et démontrer la proposition duale.

Notons $\{\psi_X : \lim_{\mathbf{C}} \rightarrow FX\}_{X \in \mathbf{C}}$ le cône limite.

On construit l'isomorphisme suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{C\^ones}_{\mathbf{C}}(F) &\xrightarrow{\sim} \mathbf{C}/\lim_{\mathbf{C}} F \\ \{\phi_X : C \rightarrow FX\}_{X \in \mathbf{C}} &\longmapsto (C, \Phi : C \rightarrow \lim_{\mathbf{C}} F) \\ \{\phi_X := \psi_X \circ \Phi\}_{X \in \mathbf{C}} &\longleftarrow (C, \Phi : C \rightarrow \lim_{\mathbf{C}} F) \\ (u : C \rightarrow C') &\longleftrightarrow (u : (C, \Phi) \rightarrow (C', \Phi')) \\ \psi_X \circ u &= \psi'_X \quad \Phi \circ u = \Phi'. \end{aligned}$$

où, dans le premier cas, on utilise la propriété universelle de la limite sur F . Pour l'équivalence entre $\psi_X \circ u = \psi'_X$ et $\Phi \circ u = \Phi'$ on procède par :

- ▷ « \implies ». propriété universelle ;
- ▷ « \impliedby ». par morphisme de cocône.

La propriété duale est : la catégorie des cocônes sur F est isomorphe à la catégorie corelative à $\operatorname{colim}_{\mathbf{C}} F$. On procède par dualité.

- ▷ la colimite $\operatorname{colim}_{\mathbf{C}} F$ est une limite dans la catégorie opposée ;
- ▷ un cocône sur F est un cône dans la catégorie opposée ;
- ▷ on a $(\mathbf{C} \setminus X)^{\operatorname{op}} = \mathbf{C}^{\operatorname{op}}/X$.

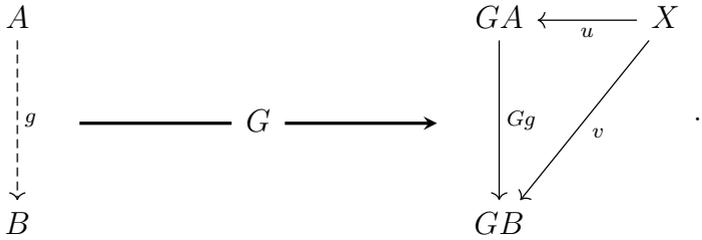
Exercice 12.

On donne (pour la première fois !) la définition de propriété universelle la plus commune, celle de morphisme universelle. Soit $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ un foncteur, et soit $X \in \mathbf{C}$. On définit le *morphisme universel* de X vers G par un couple $(A, u : X \rightarrow GA)$ tel que tout morphisme $f : X \rightarrow GB$ on dispose d'un unique $g : A \rightarrow B$ tel que le triangle suivant (à droite) commute :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} A \\ \vdots \\ g \\ \vdots \\ B \end{array} & \xrightarrow{\quad G \quad} & \begin{array}{ccc} GA & \xleftarrow{u} & X \\ \downarrow Gg & & \swarrow f \\ GB & & \end{array}
 \end{array}$$

1. Montrer qu'un morphisme universel de X vers $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ est tout simplement un objet initial de la catégorie fléchée $\mathbf{D} \setminus X$.
 2. Montrer que le foncteur $\text{Hom}(X, G-) : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est représenté par A où $\eta : h^A \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(X, G-)$ revient à dire que $(A, \eta_A(\text{id}_A) : X \rightarrow GA)$ est le morphisme universel de X dans G .
 3. Montrer aussi qu'une propriété universelle est une version locale d'un adjoint, c'est-à-dire un adjoint F à gauche de G répond pour tout X au problème universel de X vers G avec $(FX, \eta_X : X \rightarrow GFX)$ où η est l'unité de $F \dashv G$.
1. Un objet initial de la catégorie relative $\mathbf{D} \setminus X$ est un objet de la forme $(A, u : X \rightarrow GA)$ tel que pour tout autre objet $(B, v : X \rightarrow GB)$ on a un unique morphisme $g : A \rightarrow B$ qui fait

commuter le diagramme suivant :



Ainsi, un morphisme universel de X vers $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ est tout simplement un objet initial de la catégorie $\mathbf{D} \setminus X$.

2. On pose l'isomorphisme

$$\begin{aligned}
 \eta_B : \text{Hom}(A, B) &\longrightarrow \text{Hom}(X, GB) \\
 g &\longmapsto Gg \circ u,
 \end{aligned}$$

car (A, u) est un morphisme universel. Le carré suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}(A, B) & \xrightarrow{f \circ -} & \text{Hom}(A, C) \\
 \sim \downarrow \eta_B & & \sim \downarrow \eta_C \\
 \text{Hom}(X, GB) & \xrightarrow{Gf \circ -} & \text{Hom}(X, GC)
 \end{array}$$

d'où η est une transformation naturelle $\text{Hom}(A, -) \Rightarrow \text{Hom}(X, G-)$. On conclut que A représente $\text{Hom}(X, G-)$.

3. On a l'isomorphisme naturel $\alpha : \text{Hom}(X, G-) \Rightarrow \text{Hom}(FX, -)$ où

$$\begin{aligned}
 \alpha_B : \text{Hom}(X, GB) &\longrightarrow \text{Hom}(FX, B) \\
 f &\longmapsto \varepsilon_B \circ Ff,
 \end{aligned}$$

où $\varepsilon : FG \Rightarrow \text{id}_{\mathbf{C}}$. Ceci implique que, pour $f : X \rightarrow GB$, il existe un unique morphisme $g \in \text{Hom}(FX, B)$. Ainsi, par adjoint

$$G(\alpha_B(f)) \circ \eta_X = G(\varepsilon_B \circ Ff) \circ \eta_X = f.$$

Ceci implique que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 FX & & GFX \xleftarrow{\eta_X} X \\
 \alpha_B(f) \downarrow \text{---} & \xrightarrow{G} & \downarrow G(\alpha_B f) \\
 B & & GB
 \end{array}
 \quad .$$

Ceci permet d'en conclure que (FX, η_X) est un morphisme universel.