Théorie des catégories

Hugo SALOU

ENS DE LYON

10 octobre 2024

Table des matières

1 Introduction aux catégories.

Définition 1.1. Une *catégorie* $\mathbf{C}$ est la donnée de

- ▷ une collection $C_0 = \mathrm{obj}(\mathbf{C})$ « d'objets »,
- ▷ une collection C_1 « de flèches ».
- ▷ d'une loi de composition $\circ_c$, ou $\circ$, qui est associative et unitaire.

Une *flèche* f est muni d'un *domaine* $\mathrm{dom}(f)$ et d'un *codomaine* $\mathrm{cod}(f)$.

On dit que $(f_1, \ldots, f_n)$ est dit composable si $\mathrm{cod}(f_i) = \mathrm{dom}(f_{i+1})$, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$.

On dit qu'elle est associative si pour tout (f, g, h) composable on a

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

On dit qu'elle est unitaire si, pour tout objet X, on a une flèche $1_X = \mathrm{id}_X$ telle que, pour $(f, 1_X)$ et $(1_X, g_X)$ composables, on ait

$$f \circ 1_X = f \qquad \text{et} \qquad 1_X \circ g = g.$$

On appelle $\mathrm{Hom}(X, Y)$ la collection des f vérifiant $\mathrm{dom}(f) = X$ et $\mathrm{cod}(f) = Y$.

Exemple 1.1.
- ▷ La catégorie **Set** est la catégories des ensembles, où les flèches sont des fonctions muni de la composition usuelle $f \circ g = x \mapsto f(g(x))$.
- ▷ La catégorie **Grp** est la catégorie des groupes, où les flèches

correspond aux morphismes de groupes muni de la loi de composition usuelle.

- ▷ La catégorie **Ann** est la catégorie des anneaux, où les flèches correspond aux morphismes de anneaux muni de la loi de composition usuelle.
- ▷ La catégorie **Co** est la catégorie des corps, où les flèches correspond aux morphismes de anneaux.
- ▷ La catégorie $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ est la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, où les flèches correspond aux applications linéaires.
- ▷ La catégorie **Top** est la catégorie des corps, où les flèches correspond aux fonctions continues.

Dans les exemples ci-dessus, les flèches sont des fonctions. Mais, ce n'est pas forcément le cas ! On définit ci-dessous une catégorie où les flèches ne sont pas des fonctions, il n'y a pas de sens à « évaluer » une flèche dans les catégories.

Définition 1.2. Soit $\leq$ un ordre partiel sur un ensemble X. On appelle $\mathbf{Poset}(X)$ la catégorie suivante :

- ▷ les objets sont les éléments de X ;
- ▷ les flèches sont définies par : si $X \leq Y$, alors
$$\mathrm{Hom}(X, Y) = \{u_{X,Y}\};$$
- ▷ la loi de composition est : $u_{Y,Z} \circ u_{X,Y} = u_{X,Z}$.

1.1 Propriétés des morphismes.

Définition 1.3 (Isomorphisme). Deux objets x et y sont dits *isomorphes* dans une catégorie $\mathbf{C}$ si on dispose de $x \xrightarrow{f} y$ et $y \xrightarrow{g} x$ telles que $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$. On note ainsi $x \cong y$.

Exemple 1.2. Dans **Set**, X et Y sont isomorphes si on dispose d'une bijection entre X et Y.

Dans **Top**, X et Y sont isomorphes s'il existe $f : X \to Y$ bijective et bicontinue (continue et réciproque f^{-1} continue).

Définition 1.4 (Monomorphisme)**.** On dit que $Y \xrightarrow{f} Z$ est un *monomorphisme* si, pour tout (g, f) et (h, f) composables, on a

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "g"'] & Y \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}.$$

Proposition 1.1. Dans **Set**, les monomorphismes correspondent aux fonctions injectives.

Preuve. Soit $f : Y \to Z$ un monomorphisme. Soient x et y tels que $f(x) = f(y)$. On considère $X = \{*\}$, et on pose $g : * \mapsto x$ et $h : * \mapsto y$, et $f \circ g = f \circ h$, d'où $f = h$ et donc $x = y$.

L'autre sens est laissé en exercice. □

Définition 1.5. Une flèche f est dit un *épimorphisme* si

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h.$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "g"'] & Z \end{tikzcd}.$$

Proposition 1.2. Dans **Set**, un épimorphisme correspond à une surjection.

Preuve. Laissé comme exercice au lecteur. □

Définition 1.6. Un objet X est dit *initial* si, pour tout objet Y, la collection $\mathrm{Hom}(X, Y)$ ne contient qu'un seul élément.

Exemple 1.3.
- ▷ Dans **Set**, l'ensemble vide $\emptyset$ est initial.
- ▷ Dans **Grp**, le groupe trivial $\{1\}$ est initial.
- ▷ Dans $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$, l'espace vectoriel trivial (0) est initial.
- ▷ Dans **Co**, il n'y a pas d'objet initial.

Proposition 1.3. Si X est initial, alors $\mathrm{Hom}(X, X) = \{1_X\}$. Les objets initiaux sont uniques à isomorphismes près.

Preuve. Soient X et Y deux objets initiaux. Ainsi, $\mathrm{Hom}(X, Y) = \{f\}$ et $\mathrm{Hom}(Y, X) = \{g\}$ ainsi $f \circ g = 1_Y$ et $g \circ f = 1_X$, d'où $X \cong Y$. □

Définition 1.7. Un objet X est *final* ou *terminal* si pour tout objet Y, $\mathrm{Hom}(Y, X)$ est un singleton.

Proposition 1.4. Les objets terminaux sont uniques à isomorphisme près.

Preuve. Laissé comme exercice au lecteur. □

Exemple 1.4.
- ▷ Dans **Set**, les éléments finaux sont les singletons.
- ▷ Dans **Grp**, l'élément final est le groupe trivial 1, à isomorphisme près.

Définition 1.8. Soient **C** et **D** deux catégories. On dit que F est un *foncteur* de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{D}$, qu'on note $f : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ la donnée

- d'une correspondance de la collection C_0 vers D_0 :

$$\begin{aligned} F : C_0 &\longrightarrow D_0 \\ X &\longmapsto F(X), \end{aligned}$$

- d'une collection de correspondances indexées par les (X, Y) de $\mathbf{C}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(X, Y) &\longrightarrow \operatorname{Hom}(F(X), F(Y)) \\ (u : X \to Y) &\longmapsto (F(u) : F(X) \to F(Y)), \end{aligned}$$

qui vérifie les conditions

1. pour tout objet X de $\mathbf{C}$, on a $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$,
2. pour tous morphismes $u : X \to Y$ et $v : Y \to Z$, on a

$$F(v \circ u) = F(v) \circ F(u).$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend left, "v \circ u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \end{tikzcd}$$

Remarque 1.1. Si $F : C \to D$ est un foncteur, et $f : X \to Y$ est un isomorphisme, alors $F(f)$ est aussi un isomorphisme.

Définition 1.9. Soient $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ et $\mathbf{E}$ trois catégories. Soient $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ et $G : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ deux foncteurs. On appelle *composée* $G \circ F$ la fonction $\mathbf{C} \to \mathbf{E}$ qui,

- à tout objet X de $\mathbf{C}$, associe $G(F(X))$;
- et à tout morphisme $u : X \to Y$, associe $G(F(u)) : G(F(X)) \to G(F(Y))$.

En effet, pour tout objet X de $\mathbf{C}$, on a $G(F(\mathrm{id}_X)) = G(\mathrm{id}_{F(X)}) = \mathrm{id}_{G(F(X))}$. Et, pour tous morphismes $u : X \to Y$ et $v : Y \to Z$, on a

$$G(F(v \circ u)) = G(F(v) \circ F(u)) = G(F(v)) \circ G(F(u)).$$

Exemple 1.5.

Foncteurs d'oublis de structure. Soit **Top** la catégorie des espaces topologiques. Notons

- les objets de **Top**, $(X, \mathcal{O}(X))$;
- les morphismes de **Top**, $(X, \mathcal{O}(X)) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{O}(Y))$ avec $f : X \to Y$ et $f^{-1} : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Y)$;

Le foncteur d'oubli $\mathcal{U}$: **Top** $\to$ **Ens** est définit comme suit :

- $\mathcal{U}((X, \mathcal{O}(X))) = X$ pour tout objet $(X, \mathcal{O}(X))$ de **Top** ;
- $\mathcal{U}(f : (X, \mathcal{O}(X)) \to (Y, \mathcal{O}(Y))) = (f : X \to Y)$ pour tout morphisme de **Top**.

Les fonctions croissantes entre deux catégories posétales sont des foncteurs. Soient $(X, \leq)$ et $(Y, \leq)$ deux catégories posétales et f une application croissante de $(X, \leq)$ vers $(Y, \leq)$. Pour tous éléments x, y de $(X, \leq)$ tels que $x \leq y$, on a $f(x) \leq f(y)$.

Notons $\mathrm{Hom}(x, y) = \{u_{x,y}\}$. Dire que $f(x) \leq f(y)$ si $x \leq y$; c'est se donner une application $u_{x,y} \to u_{f(x),f(y)}$. On a

$$f(\mathrm{id}_x) = f(u_{x,x}) = u_{f(x),f(x)} = \mathrm{id}_{f(X)}.$$

Si on a $u_{x,y}$ et $u_{y,z}$, alors $u_{x,z}$, c'est-à-dire

$$f(u_{x,z}) = u_{f(x),f(z)} = f(u_{y,z} \circ u_{x,y}) = u_{f(y),f(z)} \circ u_{f(x),f(y)}.$$

Définition 1.10. Soient $\mathbf{C}$ une catégorie, on définit la catégorie *opposée* de $\mathbf{C}$, qu'on note $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$. C'est la catégorie dont les objets sont ceux des $\mathbf{C}$, et les morphismes de la forme suivante $f^{\mathrm{op}} : Y \to X$ avec $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathbf{C}$.

La loi de composition est $f^{\mathrm{op}} \circ g^{\mathrm{op}} : Z \to X$ avec $g : Y \to Z$ et

$f : X \to Y$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X & Y \arrow[l, "f^{\mathrm{op}}"'] \\ & Z \arrow[u, "g^{\mathrm{op}}"'] \arrow[ul, "f^{\mathrm{op}}\circ g^{\mathrm{op}} = (g\circ f)^{\mathrm{op}}"] \end{tikzcd}.$$

Exemple 1.6. ▷ *Foncteur contravariant.* Soient $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ deux catégories. On dit que F est un foncteur contravariant de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{D}$ s'il est la donnée

– d'une correspondance $C_0 \to D_0; X \mapsto F(X)$;
– d'une collection de correspondances

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(X, Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(F(X), F(Y)) \\ (u : X \to Y) &\longmapsto (F(u) : F(Y) \to F(X)), \end{aligned}$$

pour tous objets X, Y de $\mathbf{C}$, tels que

- pour tout objet X de $\mathbf{C}$, $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$;
- pour tous morphismes $u : X \to Y$ et $v : Y \to Z$, on ait $F(v \circ u) = F(u) \circ F(v)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "v\circ u"'] & Y \arrow[d, "v"] \\ & Z \end{tikzcd} \implies \begin{tikzcd} F(Z) & F(Y) \arrow[l, "F(u)"'] \\ & F(X) \arrow[u, "F(v)"'] \arrow[ul, "F(v\circ u)"] \end{tikzcd}.$$

Remarque 1.2. Un foncteur contravariant $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ est un foncteur $F : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{D}$ ou $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}^{\mathrm{op}}$.

Exemple 1.7. 1. Un foncteur de dualité de la catégorie $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$.

Soit $(-)^\star$ définie comme suit

$$\begin{aligned}(-)^\star : (\mathrm{Vect}_\mathbb{K})_0 &\longrightarrow (\mathrm{Vect}_\mathbb{K})_0\\ V &\longmapsto V^\star = \mathrm{Hom}_\mathbb{K}(V, \mathbb{K})\end{aligned}$$

où $\mathrm{Hom}_\mathbb{K}(V, W)$ est l'ensemble des applications $\mathbb{K}$-linéaires de V vers W.

Montrons que $(-)^\star$ est un foncteur contravariant. Soit X un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Ainsi, $(\mathrm{id}_X)^\star$

On définit l'application

$$\begin{aligned}(-)^{\mathrm{t}} : (\mathrm{Vect}_\mathbb{K})_1 &\longrightarrow (\mathrm{Vect}_\mathbb{K})_1\\ (u : V \to W) &\longmapsto \begin{pmatrix} {}^{\mathrm{t}}u : W^\star & \to U^\star \\ \alpha & \mapsto \alpha \circ u \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "\alpha\circ u = {}^{\mathrm{t}}u(\alpha)"] & \\ W \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{K} \end{tikzcd}.$$

Soient u et v deux applications $\mathbb{K}$-linéaires.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[d, "v"] \\ & Z \end{tikzcd}.$$

Montrons que ${}^{\mathrm{t}}(v \circ u) = {}^{\mathrm{t}}u \circ {}^{\mathrm{t}}v$. On a

$$\begin{aligned}{}^{\mathrm{t}}(v \circ u) : \alpha \mapsto \alpha \circ v \circ u &= (\alpha \circ v) \circ u\\ &= {}^{\mathrm{t}}u(\alpha \circ v)\\ &= {}^{\mathrm{t}}u({}^{\mathrm{t}}v(\alpha))\end{aligned}$$

,

donc on a bien ${}^{\mathrm{t}}(v \circ u) = {}^{\mathrm{t}}u \circ {}^{\mathrm{t}}v$.

Définition 1.11. On dit qu'une catégorie $\mathbf{C}$ est *localement petite* si, pour tous objets X et Y de $\mathbf{C}$, la collection des morphismes entre X et Y forme un ensemble qu'on va noter $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$.

On dit qu'ne catégorie est petite si la collection des objets C_0 et des morphismes C_1 forment des ensembles.

Exemple 1.8. Les catégories $\mathbf{Grp}$, $\mathbf{Top}$, $\mathbf{Ens}$, $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ et $\mathbf{Ann}$ sont localement petites.

Les catégories posétales, et les topologies munies de l'inclusion sont des catégories petites.

Exemple 1.9. Soit $\mathbf{C}$ une catégorie localement petite. Pour tout objet Y de $\mathbf{C}$, on pose

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, Y) : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}$$

le foncteur défini par :

- $\mathrm{Hom}(-, X)(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$;
- $\mathrm{Hom}(-, Y)(f) = \overbrace{\mathrm{Hom}(f, Y) = - \circ f}^{\text{notations !}}$ pour $f : A \to B$.

Définition 1.12 (Rappel : isomorphismes de catégories)**.** Pour un foncteur $f : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, on dit que F est un *isomorphisme de catégories* s'il existe $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ un foncteur tel que $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathbf{D}}$ et $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathbf{C}}$.

La notion d'égalité de foncteurs est trop *stricte*. On définit donc la notion de *transformation naturelle*.

Définition 1.13. Soient $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ deux catégories. Soient F et G deux foncteurs de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{D}$.

On appelle *transformation naturelle* η de F vers G, que l'on note $\eta : F \Rightarrow G$, une famille de morphismes $(\eta_A : F(A) \to G(A))_{A \in \mathbf{C}}$ tel que, quel que soit $f : A \to B$ dans $\mathbf{C}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_A"] & F(B) \arrow[d, "\eta_B"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"] & G(B) \end{tikzcd} .$$

On dit alors que η est un *isomorphisme naturel* si, quel que soit $A \in \mathbf{C}$, η_A soit un isomorphisme.

Si F et G sont contravariants, on a les mêmes définitions en retournant les flèches horizontales.

Exemple 1.10. On construit des foncteurs $\mathbf{Ann} \to \mathbf{Grp}$.

1. On définit le foncteur

$$\begin{aligned} (-)^\times : \quad \mathbf{Ann} &\longrightarrow \mathbf{Grp} \\ A &\longmapsto A^\times = \{a \in A \mid a \text{inversible}\} \\ (f : A \to B) &\longmapsto f^\star = f_{|A} : A^\times \to B^\times. \end{aligned}$$

2. On définit ensuite le second foncteur, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n : \quad \mathbf{Ann} &\longrightarrow \mathbf{Grp} \\ A &\longmapsto \mathrm{GL}_n A \\ (f : A \to B) &\longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{GL}_n(A) & \to \mathrm{GL}_n(B) \\ (m_{i,j})_{i,j} & \mapsto (f(m_{i,j}))_{i,j} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On pourra démontrer que les deux applications ci-dessus sont des foncteurs.

De plus, in définit, pour tout anneau A,

$$\begin{aligned}\det_A : \mathrm{GL}_n(A) &\longrightarrow A^\star \\ M &\longmapsto \det_A M.\end{aligned}$$

Si $f : A \to B$, alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}_n(A) \arrow[r, "\mathrm{GL}_n(f)"] \arrow[d, "\det_A"] & \mathrm{GL}_n(B) \arrow[d, "\det_B"] \\ A^\star \arrow[r, "f^\star"] & B^\times \end{tikzcd}$$

commute. En effet, soit $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{GL}_n(A)$, alors

$$\det\big((f(m_{i,j}))_{i,j}\big) = f^\star(\det M).$$

Ainsi, $\det : \mathrm{GL}_n \to (-)^\star$ est une transformation naturelle.

Remarque 1.3.
1. Les transformations naturelles se composent. Si $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ sont deux catégories, $F, G, H : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ trois foncteurs, et deux transformations naturelles $\eta : F \Rightarrow G$ et $\varepsilon : G \Rightarrow H$, alors on pose $(\varepsilon \circ \eta)_A = \varepsilon_A \circ \eta_A$. Alors, $\varepsilon \circ \eta : G \Rightarrow H$ est une transformation naturelle. En effet, si $f : A \to B$ est dans $\mathbf{C}$, alors le diagramme ...commute.
2. Si $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ est un foncteur, alors on définit $1_F : F \Rightarrow F$, avec $(1_F)_A = \mathrm{id}_{F(A)}$.

Définition 1.14. Soit $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un foncteur entre deux catégories $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$. On dit que F est une *équivalence de catégories* s'il existe $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ et deux isomorphismes naturels

- ▷ $\eta : F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_\mathbf{D}$;
- ▷ $\varepsilon : G \circ F \Rightarrow \mathrm{id}_\mathbf{C}$.

On appelle dans cas G un *quasi inverse* de F.

Si F est un isomorphisme de catégories, alors F est une équivalence ($1_{\mathrm{id}_F} : F \circ F^{-1} \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathbf{C}}$).

Exemple 1.11 (bidualité)**.** Soit $\mathbf{fdVect}_{\mathbb{K}}$ la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

On définit le foncteur bidual $(-)^{\mathrm{vv}} = \mathrm{Hom}(-, \mathbb{K}) \circ \mathrm{Hom}(-, \mathbb{K})$.

- Pour $A \in (\mathrm{fdVect})_0$, on a :
$$A^{\mathrm{vv}} = \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A, \mathbb{K}), \mathbb{K}).$$
- Pour $(f : A \to B)$ une application linéaire, alors
$$\begin{aligned} f^{\mathrm{vv}} : \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A, \mathbb{K}), \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(B, \mathbb{K}), \mathbb{K}) \\ \varphi &\longmapsto \varphi(- \circ f). \end{aligned}$$

Si $E \in \mathbf{fdVect}_{\mathbb{K}}$, alors on définit
$$\begin{aligned} \mathrm{eval}_E : E &\longrightarrow E^{\star\star} \\ x &\longmapsto (f \mapsto f(x)). \end{aligned}$$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrons que eval_E est un isomorphisme.

- *injectivité*. Si $\mathrm{eval}_E(x) = 0$ alors $\forall f \in E^{\mathrm{v}}$, $f(x) = 0$. Si $x \neq 0$, alors il existe H tel que $E = H \oplus \langle x \rangle$ et il existe $\varphi \in E^{\mathrm{v}}$ tel que $\varphi(x) = 1$. D'où, $x = 0$ et eval_E est injective.
- *dimension*. De plus, $\dim E = \dim E^{\mathrm{v}}$ donc eval_E est un isomorphisme.

Soit $f : E \to F$ une forme linéaire. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{eval}_E"] & F \arrow[d, "\mathrm{eval}_F"] \\ E^{\mathrm{vv}} \arrow[r, "f^{\mathrm{vv}}"] & F^{\mathrm{vv}} \end{tikzcd}$$

commute. Ainsi $(-)^{\vee\vee}$ est équivalent à $1_{\mathrm{fdVect}_{\mathbb{K}}}$.

1.2 Caractérisation de l'équivalence.

Définition 1.15. Soit $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un foncteur, où $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ sont deux catégories. On dit que

- ▷ F est *fidèle* si l'application
$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(A, B) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(F(A), F(B))\\ f &\longmapsto F(f)\end{aligned}$$
est injective, quels que soient A et B ;
- ▷ F est *plein* si l'application
$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(A, B) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(F(A), F(B))\\ f &\longmapsto F(f)\end{aligned}$$
est surjective, quels que soient A et B ;
- ▷ F est *pleinement fidèle* si F est plein et fidèle ;
- ▷ F est *essentiellement surjectif* si, pour tout $Y \in \mathbf{D}$, il existe $X \in \mathbf{C}$ tel que $F(X)$ et Y sont isomorphes dans $\mathbf{D}$.

Proposition 1.5. Soient $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ et $G : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ des foncteurs.

1. Si $G \circ F$ est fidèle, alors F est fidèle.
2. Si $G \circ F$ est plein et F est fidèle, alors G est plein.

Preuve. Complétée plus tard... □

Théorème 1.1. Soient $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ deux catégories. Un foncteur $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ est une équivalence *ssi* F est pleinement fidèle et essentiellement surjective.

Preuve. ▷ « $\implies$ ». Soit $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ une équivalence. On dispose d'un quasi-inverse $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ et de deux isomorphismes naturels $\eta : G \circ F \Rightarrow 1_{\mathbf{C}}$ et $\varepsilon : F \circ G \Rightarrow 1_{\mathbf{D}}$.

- F est essentiellement surjectif. En effet, soit $Y \in \mathrm{obj}(\mathbf{D})$, on a
$$\varepsilon_Y : F \circ G(Y) \xrightarrow{\sim} Y$$
- F est pleinement fidèle. En effet, si $f : A \to B$ est un morphisme de $\mathbf{C}$, alors le diagramme suivant commute :
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[d, bend left, "\eta_B^{-1}"] \\ G \circ F(A) \arrow[u, "\eta_A"] \arrow[r, "G \circ F \circ f"] & G \circ F(B) \arrow[u, bend left, "\eta_B"] \end{tikzcd} .$$
Ainsi, l'application
$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(GFA, GFB) \\ f &\longmapsto GFf \end{aligned}$$
est bijective d'inverse
$$g \mapsto \eta_B \circ g \circ \eta_A^{-1}.$$
Ainsi, GF est pleinement fidèle, donc F est fidèle et G est plein. De même, FG est pleinement fidèle, donc G est fidèle et F est plein.

▷ « $\Longleftarrow$ ». Soit $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ pleinement fidèle et essentiellement surjectif. On va construire $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ tel que

- $\eta : F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathbf{D}}$;
- $\varepsilon : G \circ F \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathbf{C}}$.

- Construction de $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$. Soit $Y \in \mathrm{obj}(\mathbf{D})$ alors il existe $X \in \mathrm{obj}(\mathbf{C})$ tel que $FX \cong Y$. On note cet isomorphisme $\varepsilon_Y : FGY \to Y$. Pour que la famille des $(\varepsilon_Y)_Y$ définisse une transformation naturelle, il faut que, pour toute flèche $f : A \to B$ dans $\mathbf{D}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ FGA \arrow[u, "\varepsilon_A"] \arrow[r, "FGf"] & FGB \arrow[u, "\varepsilon_B"'] \end{tikzcd}$$

commute *ssi* $\varepsilon_B FGf = f\varepsilon_A$, *ssi* $FGf = \varepsilon_B^{-1} f \varepsilon_A$. On a $\varepsilon_B^{-1} f \varepsilon_A \in \mathrm{Hom}(FGA, FGB)$.

Or, F est pleinement fidèle, il existe donc une unique flèche $u : GA \to GB$ telle que $Fu = \varepsilon_B^{-1} f \varepsilon_A$. On pose $Gf = u$. Montrons que ceci définit bien un foncteur.

- Soit $A \in \mathrm{obj}(\mathbf{D})$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] & A \arrow[d, shift left, "\varepsilon_A^{-1}"] \\ FGA \arrow[u, "\varepsilon_A"] \arrow[r, "F(1_{GA})"] & FGA \arrow[u, shift left, "\varepsilon_A"] \end{tikzcd}$$

  commute. Par unicité, $G1_A = 1_{GA}$.
- Soient $A, B, C \in \mathrm{obj}(\mathbf{D})$ et $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux foncteurs. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & B \arrow[r, "g"] & C \\ FGA \arrow[u, "\varepsilon_A"] \arrow[r, "FGf"] \arrow[rr, bend right, "FGg \circ FGf = F(Gg \circ Gf)"'] & FGB \arrow[u, "\varepsilon_B"] \arrow[r, "FGg"] & FGC \arrow[u, "\varepsilon_C"] \end{tikzcd}$$

  commute. Par unicité, $Gg \circ Gf = G(g \circ f)$ donc G est un foncteur, et $\varepsilon : FG \Rightarrow 1_{\mathbf{D}}$ est un isomorphisme naturel par construction.

– Il nous reste à construire $\eta : GF \Rightarrow 1_{\mathbf{C}}$. Soit $X \in \mathrm{obj}(\mathbf{C})$. On dispose d'un isomorphisme $(\varepsilon_{FX} : FGFX \to$

$FX) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(GFX), F(X))$. Or, F est pleinement fidèle, il existe alors une unique flèche $\eta_X : GFX \to X$ telle que $F\eta_X = \varepsilon_{FX}$. On a que ε_{FX} est un isomorphisme et F pleinement fidèle, d'où η_X est un isomorphisme.

De plus,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{FX} \circ \varepsilon_{FX}^{-1} &= \mathrm{id}_{FX} = F(\mathrm{id}_X)\\ &= F\eta_X \circ Fy\\ &= F(\eta_X \circ g)\\ &= \eta_X \circ g = \mathrm{id}_X.\end{aligned}$$

Soit $f : A \to B$ dans $\mathbf{C}$. On veut que que le diagramme suivant commute. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ GFA \arrow[u, "\eta_A"] \arrow[r, "GFf"] & GFB \arrow[u, "\eta_B"'] \end{tikzcd}$$

commute *ssi* $\eta_B \circ GFf = f \circ \eta_A$ *ssi* $F(\eta_B \circ GFf) = F(f \circ \eta_A)$, qui, après calcul donne $\eta_{FB} \circ FGFf = Ff \circ \varepsilon_{FA}$. Or, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Ff"] & FB \\ FGFA \arrow[u, "\varepsilon_{FA}"] \arrow[r, "FGFf"] & FGFB \arrow[u, "\varepsilon_{FB}"'] \end{tikzcd}.$$

Ainsi, $\eta : GF \Rightarrow 1_{\mathbf{C}}$ est un isomorphisme naturel.

□

Remarque 1.4. Un foncteur préserve les diagrammes commutatifs.

1.3 Sous-catégories.

Définition 1.16. Soit $\mathbf{C}$ une catégorie. Une *sous-catégorie* $\mathbf{C}'$ de $\mathbf{C}$ est une catégorie telle que

1. $\mathrm{obj}(\mathbf{C}') \subseteq \mathrm{obj}(\mathbf{C})$;
2. $\forall A, B \in \mathrm{obj}(\mathbf{C}'), \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(A, B) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$;
3. $\forall A \in \mathrm{obj}(\mathbf{C}'), 1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(A, A)$;
4. $\forall (f : A \to B), (g : B \to C) \in C_1', g \circ_{\mathbf{C}'} f = g \circ_{\mathbf{C}} f$.

Note 1.1. On dit que $\mathbf{C}'$ est une sous-catégorie pleine si on a l'égalité dans 2. Il suffit donc de préciser les objets de $\mathbf{C}'$ pour définir les flèches. On note alors $\mathbf{C}' \subseteq \mathbf{C}$.

Définition 1.17 (Squelette). Soit $\mathbf{C}$ une catégorie. Un *squelette* $\mathbf{S}$ de $\mathbf{C}$ est une sous-catégorie pleine telle que $\mathrm{obj}(\mathbf{S})$ contient un et un seul objet de chaque classe d'isomorphisme de $\mathbf{C}$.

Exemple 1.12. Avec $\mathbf{fdVect}_{\mathbb{K}}$, un squelette peut être définir par les objets $\mathbb{K}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.13. Si on admet l'axiome du choix pour les catégories, toute catégorie admet un squelette.

Proposition 1.6. Soient $\mathbf{C}$ une catégorie et $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{C}$ un squelette. Alors $\mathbf{S}$ et $\mathbf{C}$ sont équivalentes.

Preuve. On considère le foncteur d'inclusion

$$
\begin{aligned}
F : \mathbf{S} &\longrightarrow \mathbf{C}\\
A &\longmapsto A\\
f &\longmapsto f
\end{aligned}
$$

.

On sait que F est pleinement fidèle (car il induit l'identité sur les flèches et $\mathbf{S}$ pour sous-catégorie pleine, *i.e.* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$). Soit $Y \in \mathrm{obj}(\mathbf{C})$, alors, par définition d'un squelette, il existe $X \in \mathrm{obj}(\mathbf{S})$ tel que $X \cong Y$ avec $F : X \to Y$ l'isomorphisme, d'où F est essentiellement surjective et F équivalence (par le théorème). □

Définition 1.18. Une catégorie $\mathbf{C}$ est dite *essentiellement petite* si elle est équivalente à une petite catégorie.

Remarque 1.5. Ça équivaut à dire que $\mathbf{C}$ admet un squelette qui est une petite catégorie.

Exemple 1.14. La catégorie $\mathbf{fdVect}_{\mathbb{K}}$ est essentiellement petite. En effet, le squelette $\{\mathbb{K}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une petite catégorie.

La catégorie **fGroup** des groupes finis est essentiellement petite. En effet, tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ où $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $\mathrm{obj}(\mathbf{S}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{G \mid G \text{sous-groupe de} \mathfrak{S}_n\}$.

Définition 1.19. Deux catégories $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ sont dites *duales* si $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ et $\mathbf{D}$ sont équivalentes : il existe $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ et $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ deux foncteurs contravariants, et deux isomorphismes naturels $\eta : FG \Rightarrow 1_{\mathbf{D}}$ et $\varepsilon : GF \Rightarrow 1_{\mathbf{C}}$.

On dit alors que F est une dualité et que G est une dualité *quasi inverse*.

Exemple 1.15.
- ▷ $\mathbf{C}$ est toujours duale à $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$;
- ▷ la composé de deux équivalences est une équivalence ;
- ▷ la composée de deux dualités est une équivalence ;
- ▷ la composée d'une dualité et d'une équivalence est une dualité ;
- ▷ la composée d'une équivalence et d'une dualité est une dualité ;

2 Diagramme dans une catégorie.

Définition 2.1. Soit $\mathbf{J}$ une petite catégorie, on appelle $\mathbf{J}$-diagramme dans une catégorie $\mathbf{C}$ tout foncteur $F : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$.

Exemple 2.1.

▷ Le diagramme

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[loop above, "\mathrm{id}_{A_1}"] & A_2 \arrow[loop above, "\mathrm{id}_{A_2}"] \end{tikzcd} ,$$

est défini par : $J_0 = \{1, 2\}$ et $J_1 = \{\mathrm{id}_1, \mathrm{id}_2\}$ avec

$$\begin{aligned} F : \mathbf{J} &\longrightarrow \mathbf{C} \\ i &\longmapsto A_i \\ \mathrm{id}_i &\longmapsto \mathrm{id}_{A_i}. \end{aligned}$$

▷

$$A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_3 \ .$$

Définition 2.2. On dit qu'un diagramme $F : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ est *commutatif* si pour tous $F(L)$ et $F(K)$ avec L et K deux objets de $\mathbf{J}$, tous les morphismes de source $F(L)$ et de but $F(K)$ sont égaux.

Références

— *Categories for the working mathematician* – Mac Lane
— *The Joy of abstractation* – Eugenia Chen
— *Algèbre et théories galoisiennes* – Adrien Douady
— Cours de Ralph Sarkis