DM n°2
Mesure & Intégration

Hugo Salou
Dept. Informatique

ENS DE LYON

9 avril 2025

Exercice 1.

1. Pour la linéarité de ℓ_N, on utilise la linéarité de la somme, et la linéarité des fonctions c_n : si $f, g \in \mathscr{C}_{2\pi}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} c_n(f+\alpha g) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(t)+\alpha g(t))\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t + \frac{\alpha}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \\ &= c_n(f)+\alpha c_n(g). \end{aligned}$$

Pour monter que ℓ_N est continue, on montre que c'est une somme fini de fonctions continues car 1-lipschitzienne. En effet,

$$\begin{aligned} |c_n(f)| &\leq \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t\Big| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_\infty\,\mathrm{d}t \\ &\leq \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

et il en découle que ℓ_N est $2N$-lipschitzienne, donc continue. De plus, on a que, pour toute fonction $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ telle que $\|f\|_\infty \leq 1$,

$$\ell_N(f) = \sum_{n\in[\![-N,N]\!]} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{D}_N(-t)\,\mathrm{d}t,$$

d'où, par inégalité triangulaire,

$$|\ell_N(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)||\mathrm{D}_N(-t)| \,\mathrm{d}t \leq \|f\|_\infty \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathrm{D}_N(t)| \,\mathrm{d}t}_{\|\mathrm{D}_N\|_1}.$$

Ainsi, comme $\|f\|_\infty \leq 1$, on en déduit $|\ell_N(f)| \leq \|\mathrm{D}_N\|_1$ quel que soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ avec $\|f\|_\infty \leq 1$. On a donc un majorant de la fonction $|\ell_N|$. D'où $\|\ell_N\| \leq \|\mathrm{D}_N\|_1$ par sup.

2. Considérons, comme indiqué dans l'indication, les fonctions f_ε où $f_\varepsilon(t) = \mathrm{D}_N(t)/(|\mathrm{D}_N(t)| + \varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$. D'une part, on sait que f_ε est 2π-périodique. De plus, la continuité vient de la continuité de D_N (plus facile à voir sur l'expression avec la somme), et car $|\mathrm{D}_N(t)|+\varepsilon \geq \varepsilon > 0$ si $\varepsilon > 0$. En utilisant l'égalité sur $\ell_N(f)$ précédente, on calcule

$$\ell_N(f_\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{D}_N^2(t)}{|\mathrm{D}_N(t)| + \varepsilon} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\mathrm{D}_N(t)|^2}{|\mathrm{D}_N(t)| + \varepsilon} \,\mathrm{d}t.$$

Or, $g_\varepsilon = |\mathrm{D}_N|^2/(|\mathrm{D}_N| + \varepsilon)$ converge presque partout vers $|\mathrm{D}_N|$ lorsque l'on a $\varepsilon \to 0$. De plus, g_ε est dominée par $|\mathrm{D}_N|$ intégrable. Par le théorème de convergence dominée,

$$|\ell_N(f_\varepsilon)| = \ell_N(f_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathrm{D}_N(t)| \,\mathrm{d}t = \|\mathrm{D}_N\|_1.$$

On vérifie aisément que

- ▷ f_ε est 2π-périodique et continue (simple à remarquer à partir de la forme de somme d'exponentielles) ;
- ▷ $\|f_\varepsilon\|_\infty = \sup_{t \in]-\pi,\pi[} |\mathrm{D}_N(t)|/(|\mathrm{D}_N(t)| + \varepsilon) \leq 1$.

On en conclut que

$$\|\ell_N\| = \|\mathrm{D}_N\|_1.$$

3. On a

$$
\begin{aligned}
\|\mathrm{D}_N\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\mathrm{D}_N(t)|\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin[(2N+1)t/2]\,|}{|\sin t/2\,|}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2N+1)u\,|}{|\sin u\,|}\,\mathrm{d}u\\
&\geq \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2N+1)u\,|}{|u|}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-N\pi-\frac{\pi}{2}}^{N\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin v\,|}{|v|}\,\mathrm{d}v\\
&\xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\sin v\,|}{|v|}\,\mathrm{d}v = +\infty.
\end{aligned}
$$

Par minoration, on en déduit que $\|\ell_N\| \to +\infty$ lorsque $N \to \infty$.

4. On applique le théorème de Banach-Steinhaus où les espaces vectoriels sont $E = (\mathscr{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ et $F = (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Pour démontrer que l'espace vecotoriel $\mathscr{C}_{2\pi}$ est complet, on utilise la complétude de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mu_{\mathrm{L}})$. Considérons une suite de Cauchy $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $\mathscr{C}_{2\pi}$. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, espace complet, qui converge donc vers $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Or, car la convergence est pour la norme infini, la convergence des g_n est uniforme vers g. On sait ainsi que g est continue (car les g_i le sont), par unicité de la limite,

$$
g(x+2\pi) \xleftarrow[\infty\leftarrow n]{} g_n(x+2\pi) = g_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x).
$$

On en conclut que g est dans $\mathscr{C}_{2\pi}$. L'espace E est donc complet. On peut donc appliquer le théorème de Banach-Steinhaus avec les applications linéaires continues $(\ell_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (*c.f.* question 1) de E dans F. Deux cas sont donc possibles.

- ▷ Ou bien la famille $(\|\ell_i\|)_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée, ***absurde*** par la question 3.

▷ Ou bien il existe une intersection A dénombrable d'ouverts denses dans $\mathscr{C}_{2\pi}$ telle que $\sup_{N\in\mathbb{N}} |\ell_N(f)| = +\infty$ pour toute fonction $f \in A$, *i.e.* que la série de Fourier de f diverge en 0.

Exercice 2.

1. Pour montrer que ϕ_g est bien définit, il suffit de montrer que si g et g' sont égales μ-presque partout, alors quel que soit f, les fonctions $f \cdot g$ et $f \cdot g'$ sont égales μ-presque partout. Ainsi, on a l'égalité $\int_\Omega f(x)\, g(x)\, \mu(\mathrm{d}x) = \int_\Omega f(x)\, g'(x)\, \mu(\mathrm{d}x)$, d'où $\phi_g = \phi_{g'}$.

   De plus, par l'inégalité de Hölder, on a que

   $$\left| \int_\Omega fg\, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_\Omega |fg|\, \mathrm{d}\mu \leq \|f\|_{\mathrm{L}^p} \times \|g\|_{\mathrm{L}^q},$$

   qui est fini car les deux termes sont finis : on a bien $\phi_g(f) \in \mathbb{R}$. On en conclut que ϕ est bien définie.

   La linéarité de ϕ_g vient simplement de la linéarité du produit de fonctions et de la linéarité de l'intégrale :

   $$\begin{aligned} \phi_{\alpha g + \beta h}(f) &= \int_\Omega (\alpha g(x) + \beta h(x))\, f(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \alpha \int_\Omega g(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x + \beta \int_\Omega h(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \alpha \phi_g(f) + \beta \phi_h(f). \end{aligned}$$

   Pour la continuité, il suffit de remarquer que ϕ est 1-lipschitzienne. En effet, on veut montrer que (par linéarité)

   $$\|\phi_g\|_{(\mathrm{L}^p)^*} := \sup_{\|f\|_{\mathrm{L}^p} = 1} |\phi_g(f)| \leq \|g\|_{\mathrm{L}^q}.$$

   Soit $f \in \mathrm{L}^p$ telle que $\|f\|_{\mathrm{L}^p} = 1$. Alors, par l'inégalité de Hölder, on a que

   $$|\phi_g(f)| = \left| \int_\Omega f\, g\, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_\Omega |f\, g|\, \mathrm{d}\mu \leq \|g\|_{\mathrm{L}^q} \times \cancel{\|f\|_{\mathrm{L}^p}},$$

et ce, quel que soit f de norme L^p valant 1. Ainsi $\|\phi(g)\|_{(\mathrm{L}^p)^*} \leq \|g\|_{\mathrm{L}^q}$ et on en déduit que ϕ est 1-lipschitzienne donc continue.

2. Dans la question 1, on a montré $(\star)$: $\|\phi_g\|_{(\mathrm{L}^p)^*} \leq \|g\|_{\mathrm{L}^q}$. Il ne reste qu'à montrer l'autre inégalité. Considérons la fonction étagée $u_g = \mathbb{1}_{\{g(x)>0\}} - \mathbb{1}_{\{g(x)<0\}}$. Elle est bien définie car, si on a $g = g'$ μ-presque partout, alors $u_g = u_{g'}$ μ-presque partout. On vérifie que $g = u_g|g|$: la fonction u_g donne le signe de g. Et, elle est mesurable car l'application $g/|g|$ l'est comme quotient de deux fonctions mesurables. On pose $h_{p,g} = u_g/\sqrt[p]{\mu(\Omega)}$ où $\mu(\Omega) \geq 0$ est fini par hypothèse. La fonction h_g est donc mesurable. Ainsi, on a

$$\int_\Omega |h_{p,g}|^p \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega |u_g|^p \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega \mathrm{d}\mu = 1.$$

D'où, $\|h_{p,g}\|_{\mathrm{L}^p} = 1$. Or,

$$\left| \int_\Omega h_{p,g}\, g \,\mathrm{d}\mu \right| = \left| \int_\Omega |g| \,\mathrm{d}\mu \right| = \int_\Omega |g| \,\mathrm{d}\mu \leq \|g\|_{\mathrm{L}^q},$$

car $q \geq 2$. On en conclut que $\|\phi_g\|_{(\mathrm{L}^p)^*} \geq \|g\|_{\mathrm{L}^q}$, où l'on a égalité avec l'inégalité $(\star)$ précédente.

3. Comme $\gamma \in (\mathrm{L}^p)^*$, on sait que $\gamma : \mathrm{L}^p \to \mathbb{R}$ est une application linéaire continue.

   a) On applique le théorème de représentation de Riesz à l'application linéaire continue $\gamma_{|\mathrm{L}^2} : \mathrm{L}^2 \to \mathbb{R}$. En effet, on a l'inclusion de $\mathrm{L}^2 \subseteq \mathrm{L}^p$ car $1 \leq p < 2$ et Ω est de mesure finie (vu en TD). Et, on sait que L^2 est un espace de Hilbert. Ceci justifie l'utilisation du théorème de représentation de Riesz, et on obtient donc qu'il existe $g \in \mathrm{L}^2$ tel que pour tout $f \in \mathrm{L}^2$,

$$\gamma_{|\mathrm{L}^2}(f) = \langle f, g\rangle_{\mathrm{L}^2} = \int_\Omega f\, g \,\mathrm{d}\mu.$$

   b) Montrons que $\|g\|_{\mathrm{L}^p}$ est finie. Considérons la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où l'on pose $g_n := u|g|^{q-1}\mathbb{1}_{\{|g|\leq n\}}$. La suite $(|g_n|)$ est croissante et converge vers $|g|^{q-1}$. Ainsi, par le théorème de

Beppo-Levi, on a que

$$\gamma(g_n) = \int_\Omega g\, g_n \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\Omega |g|^q \,\mathrm{d}\mu.$$

Et $|\gamma(g_n)| \le \|\gamma\|_{(\mathrm{L}^p)^*}\, \|g_n\|_{\mathrm{L}^p}$ est finie car

- ▷ $\|\gamma\|_{(\mathrm{L}^p)^*} < +\infty$ car γ est continue ;
- ▷ $\|g_n\|_{\mathrm{L}^p}^p = \int_{\{|g|\le n\}} |g|^{(q-1)p}\,\mathrm{d}\mu = \int_{\{|g|\le n\}} |g|^p\,\mathrm{d}\mu \le \|g\|_{\mathrm{L}^p}$, qui est finie par l'inclusion $\mathrm{L}^2 \subseteq \mathrm{L}^p$.

On sait donc que $\|g\|_{\mathrm{L}^q}$ est finie car majorée. On en conclut que $g \in \mathrm{L}^q$.

4. Pour une forme linéaire continue $\gamma \in (\mathrm{L}^p)^*$, on a trouvé $g \in \mathrm{L}^q$ tel que $(\phi_g)_{|\mathrm{L}^2} = \gamma_{|\mathrm{L}^2}$. Soit $f \in \mathrm{L}^p$ quelconque. Par densité de L^2 dans L^p, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans L^2 convergent vers f. Ainsi,

$$\phi_g(f) \xleftarrow[\infty\leftarrow n]{} \phi_g(f_n) = \gamma(f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma(f),$$

par continuité de ϕ_g (question 1) et de γ (car $\gamma \in (\mathrm{L}^p)^*$). Ainsi, on a bien $\phi_g(f) = \gamma(f)$ quel que soit $f \in \mathrm{L}^p$. On en conclut que l'on a $\phi_g = \gamma$ et donc que ϕ est surjective.

5. Il ne reste qu'à démontrer que ϕ est injective. Soit $g \in \ker\phi$. Ainsi, pour tout $f \in \mathrm{L}^p$, on a $\phi_g(f) = 0$. D'où, $\|\phi_g\|_{(\mathrm{L}^p)^*} = 0$, et donc (question 2) $\|g\|_{\mathrm{L}^q} = 0$. Or, par séparation de la norme, on a que $g = 0$ (nulle μ-presque partout implique nulle dans le quotient). On en déduit que $\ker\phi$ est réduit au singleton trivial ; l'application ϕ est donc injective.

On en conclut que $\phi : \mathrm{L}^q \to (\mathrm{L}^p)^*$ est un isomorphisme continu, et on a donc $\mathrm{L}^q \cong (\mathrm{L}^p)^*$.

Fin du DM.