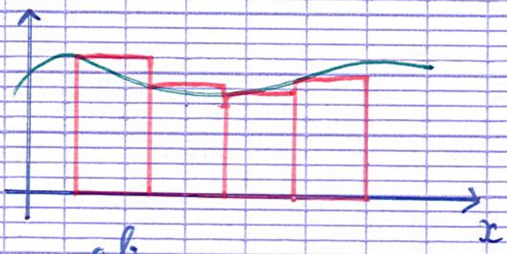
hugo
SALOU
L3-ENS

Intégration & mesure

I. Introduction

Le but de ce cours est d'étudier l'intégra
de Lebesgue, avec plus de propriétés.

Au XIX^e siècle, Cauchy et Riemann travaille
sur l'intégration de Riemann, où l'on calcule
l'aire en subdivisant l'intervalle.



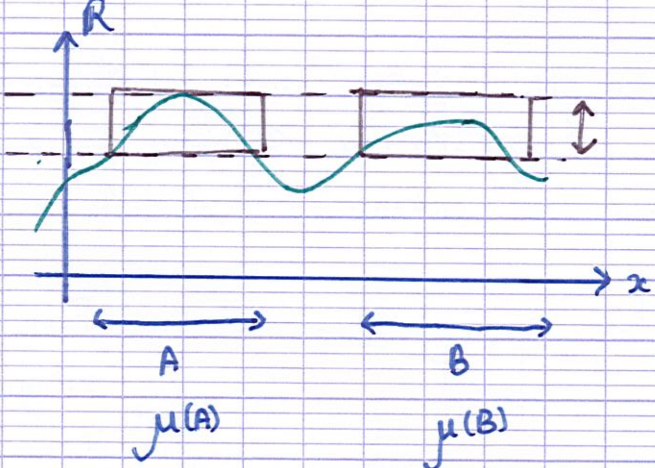
Pour définir un
intégrale, on s
demande d'avoir
deux propriétés

① $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$
où $F' = f$.

② une définition compatible avec l'aire sou
la courbe.

Pour l'intégrale de Riemann, on a beso
que la fonction soit continue par morceaux,
donc bornée.

Au contraire de celle de Riemann, l'in
grale de Lebesgue subdivise l'espace
d'arrivée:



Cette nouvelle définition permet de calculer des intégrales de fonctions plus variées:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{ou} \quad f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$$

On aimerait, en plus des propriétés usuelle
que l'intégrale soit stable par passage à
limite.

II. Ensembles dénombrables.

On dit qu'un ensemble A est dénombrable
existe une bijection entre A et $\mathbb{N}$.

On dit qu'un ensemble B est fini s'il existe
bijection entre B et $[\![1, n]\!]$, pour un
certain $n \in \mathbb{N}$.

On pourra ainsi noter :

→ $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$

→ $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$

→ $n = \text{card } B$.

On dit enfin que C est au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.

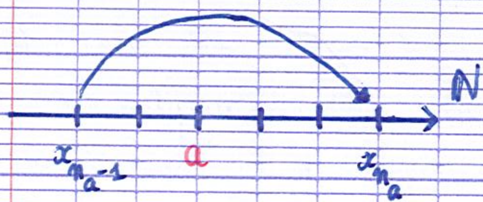
Proposition : Si $A \subseteq \mathbb{N}$, alors A est au plus dénombrable

preuve : idée
- Si $A = \emptyset$, alors A est fini.
- Si $A \neq \emptyset$, alors on peut définir $x_0 = \min$

On suppose A infini, et on définit par récurrence la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

- $x_0 = \min(A)$
- $x_{n+1} = \min(A \setminus \{x_0, \dots, x_n\})$

- L'application $n \mapsto x_n$ est injective.
- Soit $a \in A$. On a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq n$.
  On pose $S_a = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \geq n\}$.
  On sait que $S_a \neq \emptyset$; on peut donc définir $n_a = \min S_a$.



- Si $n_a = 0$, alors
  $x_{n_a} = x_0 = \min$

  Or $a \leq x_{n_a}$
  et donc $a \leq \min A$
  d'où $a = \min A$
  et donc $a = x_{n_a} = x_0$

- Si $n_a > 0$, alors
  $x_0 < \dots < x_{n_a-1} < a \leq x_{n_a}$.

Mais, $x_{n_a} = \min (A \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_{n_a-1}\})$
et $x_{n_a} \geq a$ (car $x_{n_a} \in J_a$).

On en déduit $x_{n_a} = a$.

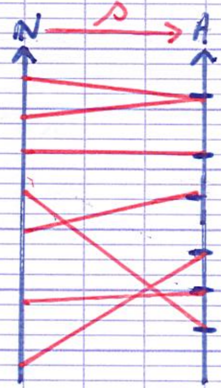
L'application est donc bijective.

Proposition : • S'il existe $i : A \to \mathbb{N}$ une injecti
alors A est au plus dénombrable.
• S'il existe $s : \mathbb{N} \to A$ une surjection
alors A est au plus dénombrable.

idée de la preuve :

- On sait que $i : A \to i(A)$ est une bijection. Comme $i(A) \subseteq \mathbb{N}$, $i(A)$ est au plus dénombrable, donc, par composition des bijections, A est au plus dénombrable

$$A \xrightarrow{bij} i(A) \xrightarrow{bij} \mathbb{N} \text{ ou } [\![1, n]\!]$$



- On peut définir

$$n_x = \min(s^{-1}(\{x\})),$$

quel que soit $x \in A$.

L'application $x \mapsto n_x$ est une bijection. $\square$

Exemples

- $\mathbb{Z}$ est dénombrable :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto \begin{cases} 2k & \text{si } k \geqslant 0 \\ -2k-1 & \text{si } k < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- $\mathbb{N}^k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Soient $(p_1, \dots, p_k)$ les k premiers nombres premiers. On définit donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^k &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n_1, \dots, n_k) &\longmapsto p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k} \end{aligned}$$

Proposition : Un produit fini d'ensembles dénombrables dénombrable.

preuve : Si $A_1, \dots, A_k$ sont dénombrables, il existe $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ des bijections de la forme

$$\varphi_i : A_i \longrightarrow \mathbb{N}$$

pour $i \in [\![1, k]\!]$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \varphi : A_1 \times \dots \times A_k &\longrightarrow \mathbb{N}^k \\ (a_1, \dots, a_k) &\longmapsto (\varphi_1(a_1), \dots, \varphi_k(a_k)) \end{aligned}$$

est bijective, et donc $A_1 \times \dots \times A_k$ est dénomb

Exemple :

- $\mathbb{Q}$ est dénombrable :

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$(p, q) \longmapsto p/q$$

est surjective.

- Une union au plus dénombrable d'ensemb au plus dénombrables est au plus dénombrable

En effet, $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, et on a $s_i : \mathbb{N} \to A_i$ une bijection, pour $i \in I$. Et, on pose :

$$s : I \times \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$$
$$(i, n) \longrightarrow s_i(n).$$

- $\mathcal{P}_{finies}(\mathbb{N}) = \{ A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ est finie} \}$

$$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n(\mathbb{N})$$

où $\mathcal{P}_n(\mathbb{N})$ est l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ à n éléments.

- $\mathbb{Z}[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^{n-1}) \longrightarrow \mathbb{Z}[X].$$

$$(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0) \longmapsto a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$$

- L'ensemble $\mathcal{A}$ des nombres algébriques est dénombrable car

$$\mathcal{A} = \bigcup_{P \in \mathbb{Z}[X]} \{ z \in \mathbb{C} \mid P(z) = 0 \}.$$

Théorème (Cantor) : Il existe des ensembles non dénombrables. Par exemple, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

preuve: Soit $S = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. On montre par l'absurde que S n'est pas dénombrable. Supposons qu'il existe une bijection

$$\varepsilon : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

On note

$$\varepsilon(n) = (\varepsilon_0(n), \varepsilon_1(n), \dots, \varepsilon_k(n), \dots)$$

$$\begin{array}{lcccccc}
\varepsilon(0): & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\
\varepsilon(1): & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
\varepsilon(2): & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\
\varepsilon(3): & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

On définit alors

$$\tilde{\varepsilon} = (1-\varepsilon_0(0), 1-\varepsilon_1(1), \dots, 1-\varepsilon_k(k), \dots$$

et $\tilde{\varepsilon} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \{\varepsilon(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, absurde

$\square$

Exemples :

- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable car

$$\begin{aligned} \{0,1\}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varepsilon &\longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2\varepsilon_n}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

est une injection, ce qui serait impossible si $\mathbb{R}$ était dénombrable.

- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable car

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ A &\longmapsto (\mathbb{1}_A(n))_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

est une bijection.

Théorème (Cantor) : On ne peut pas avoir une bije
de la forme $X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.

preuve: Par l'absurde, soit une bijection
$f : X \to \mathcal{P}(X)$.
Alors, on pose $S = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$.
Soit $s = f^{-1}(S)$, alors $f(s) = S$,
et donc

$$s \in S \iff s \notin f(S) \iff s \notin S.$$

Absurde !

III Sommes de nombres positifs.

On s'autorise à sommer des réels positifs
potentiellement infinis :

$$a_j \in \overline{\mathbb{R}}_+ = [0,+\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

En général, si J est un ensemble et $(a_j)_{j\in J}$ est une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}_+$,

alors on définit

$$\sum_{j\in J} a_j = \sup\left\{\sum_{i\in I} a_i \;\middle|\; \begin{array}{l} I \subseteq J \\ \text{et} \\ I \text{ est fini} \end{array}\right\}$$

Proposition : Si J est dénombrable et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante (au sens de l'inclusion) de parties finies de J telle que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = J,$$

alors

$$\sum_{j\in J} a_j = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j\in A_n} a_j$$

■