La théorie des ensembles.

On se place dans la logique du 1er ordre avec $\mathscr{L} = \{\in, =\}$. On se place dans un univers $\mathscr{U}$ non vide, le modèle, dont les éléments sont appelés des *ensembles*.

Il faudra faire la différence entre les ensembles « naïfs » (les ensembles habituels), et les ensembles « formels » (les éléments de $\mathscr{U}$).

On a le paradoxe de Russel. On peut l'écrire

> « On a un barbier qui rase tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes. Qui rase le barbier ? ».

Si $\mathscr{U}$ est l'ensemble de tous les ensembles, alors

$$a := \{\, x \in \mathscr{U} \mid x \notin x \,\}$$

vérifie $a \in a \iff a \notin a$, ***paradoxe***. Pour éviter ce paradoxe, on choisit donc de ne pas faire $\mathscr{U}$ un ensemble.

1 Les axiomes de la théorie de Zermelo-Fraenkel.

ZF 1. *Axiome d'extensionnalité* : deux ensembles sont égaux ssi ils ont les mêmes éléments

$$\forall x \, \forall y \, \Big(\forall z \, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y\Big).$$

- *Axiome de la paire* [1] : il existe une paire $\{x, y\}$ pour tout élément x et y

$$\forall x \, \forall y \, \exists z \, \forall t \Big(t \in z \leftrightarrow (t = x \vee t = y)\Big).$$

[*continué plus tard*...]

1. On verra plus tard que cet axiome est une conséquence des autres (de ZF 3 et ZF 4).

Remarque 1. Cela nous donne l'existence du *singleton* $\{x\}$ si x est un ensemble. En effet, il suffit de faire la paire $\{x, x\}$ avec l'Axiome de la paire.

Définition 1. Si a et b sont des ensembles, alors (a, b) est l'ensemble $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Ainsi, (a, a) est l'ensemble $\{\{a\}\}$.

Lemme 1. Pour tous ensembles a, b, a', b', on a $(a, b) = (a', b')$ ssi $a = a'$ et $b = b'$.

Preuve. En exercice. □

Définition 2. On peut construire des 3-uplets (a_1, a_2, a_3) avec $(a_1, (a_2, a_3))$, et ainsi de suite pour les n-uplets.

Notation. On utilise les raccourcis

- $t = \{a\}$ pour $\forall x\ (x \in t \leftrightarrow x = a)$;
- $t = \{a, b\}$ pour $\forall x\ (x \in t \leftrightarrow (x = a \vee x = b))$;
- $t \subseteq a$ pour $\forall x\ (z \in t \to z \in a)$.

ZF 3. *Axiome des parties* : l'ensemble des parties $\wp(a)$ existe pour tout ensemble a

$$\forall a\ \exists b\ \forall t\ (t \in b \leftrightarrow t \subseteq a).$$

ZF 2. *Axiome de la réunion* : l'ensemble $y = \bigcup_{z \in x} z$ existe

$$\forall x\ \exists y\ \forall t (t \in y \leftrightarrow \exists z (t \in z \wedge z \in x)).$$

Remarque 2. Comment faire $a \cup b$? La paire $x = \{a, b\}$ existe par l'Axiome de la paire, et $\bigcup_{z \in x} z = a \cup b$ est un ensemble par ZF 2.

ZF 4'. *Schéma de compréhension* : pour toute formule $\varphi(y, v_1, \dots, v_n)$, on a l'ensemble $x = \{\, y \in v_{n+1} \mid \varphi(y, v_1, \dots, v_n) \,\}$

$$\forall v_1\ \dots\ \forall v_n\ \exists x\ \forall y\ \Big(y \in x \leftrightarrow (y \in v_{n+1} \wedge \varphi(y, v_1, \dots, v_n))\Big).$$

Remarque 3. Peut-on faire le paradoxe de Russel ? On ne peut pas faire $a := \{z \in \mathscr{U} \mid z \notin z\}$ car $\mathscr{U}$ n'est pas un ensemble ! Et, on ne peut pas avoir de paradoxe avec $b := \{z \in E \mid z \notin z\}$, car on a l'ajout de la condition $b \in E$.

Définition 3. Une *relation fonctionnelle* en w_0 est une formule $\varphi(w_1, w_2, a_1, \dots, w_n)$ *à paramètres* (où les a_i sont dans $\mathscr{U}$) telle que

$$\mathscr{U} \models \forall w_0\, \forall w_1\, \forall w_2\, \big(\varphi(w_0, w_1, a_1, \dots, a_n) \land \varphi(w_0, w_2, a_1, \dots, w_n) \to w_1 = w_2\big).$$

En termes naïfs, c'est une fonction partielle. On garde le terme *fonction* quand le domaine et la collection d'arrivée sont des *ensembles*, autrement dit, des éléments de $\mathscr{U}$.

ZF 4. *Schéma de substitution/de remplacement* : « la collection des images par une relation fonctionnelle des éléments d'un ensemble est aussi un ensemble ». Pour tout n-uplet $\bar{a}$, si la formule à paramètres $\varphi(w_0, w_1, \bar{a})$ définit une relation fonctionnelle $f_{\bar{a}}$ en w_0 et si a_0 est un ensemble alors la collection des images par $f_{\bar{a}}$ des éléments de a_0 est un ensemble nommé a_{n+1}

$$\begin{gathered}\forall a_0 \cdots \forall a_n \\ \Big(\forall w_0\, \forall w_1\, \forall w_2(\varphi(w_0, w_1, a_1, \dots, a_n) \land \varphi(w_0, w_2, a_1, \dots, a_n)) \to w_1 = w_2\Big) \\ \downarrow \\ \exists a_{n+1}\, \forall a_{n+2}(a_{n+2} \in a_{n+1} \leftrightarrow \exists w_0\, w_0 \in a_0 \land \varphi(w_0, a_{n+2}, v_1, \dots, v_n)).\end{gathered}$$

Théorème 1. Si ZF 1, ZF 2, ZF 3 et ZF 4 sont vrais dans $\mathscr{U}$, il existe (dans $\mathscr{U}$) un et un seul ensemble sans élément, que l'on notera $\emptyset$.

Preuve.
- *Unicité* par ZF 1.
- *Existence.* On procède par compréhension : l'univers $\mathcal{U}$ est non vide, donc a un élément x. On considère la formule $\varphi(w_0, w_1) := \perp$ qui est une relation fonctionnelle. Par ZF 4 (avec la formule φ et l'ensemble $a_0 := x$) un ensemble a_{n+1} qui est vide.

□

Proposition 1. Si ZF 1, ZF 2, ZF 3 et ZF 4 sont vrais dans $\mathcal{U}$, alors l'Axiome de la paire est vrai dans $\mathcal{U}$.

Preuve. On a $\emptyset$ dans $\mathcal{U}$ et également $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$ et $\wp(\wp(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ par ZF 3.

Étant donné deux ensemble a et b, on veut montrer que $\{a, b\}$ est un ensemble avec ZF 4

$$\varphi(w_0, w_1, a, b) := (w_0 = \emptyset \wedge w_1 = a) \vee (w_0 = \{\emptyset\} \wedge w_1 = b),$$

où
- $w_0 = \emptyset$ est un raccourci pour $\forall z\, (z \notin w_0)$;
- $w_0 = \{\emptyset\}$ est un raccourci pour $\forall z\, (z \in w_0 \leftrightarrow (\forall t\, t \notin z))$.

Ces notations sont compatibles avec celles données précédemment.

Comme φ est bien une relation fonctionnelle et $\{a, b\}$ est l'image de $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. □

Proposition 2. Si ZF 1, ZF 2, ZF 3 et ZF 4 sont vrais dans $\mathcal{U}$, alors ZF 4' est vrai dans $\mathcal{U}$.

Preuve. On a la formule $\varphi(y, v_1, \ldots, v_n)$ et on veut montrer que

$$\mathcal{U} \models \forall v_1 \; \cdots \; \forall v_{n+1}\, \exists x\, \forall y\, \Big(y \in x \leftrightarrow (y \in v_{n+1} \wedge \varphi(y, v_1, v_n))\Big).$$

On considère la formule $\psi(w_0, w_1, \bar{v}) := w_0 = w_1 \wedge \varphi(w_0, \bar{v})$, qui est bien une relation fonctionnelle en w_0. La collection

$$\{\, x \in v_{n+1} \mid \varphi(y, v_1, \ldots, v_n) \,\}$$

est l'image de v_{n+1} par ψ par ZF 4. $\square$

Remarque 4. La réciproque du théorème précédent est fausse ! Les axiomes ZF 4 et ZF 4' ne sont pas équivalents. On le verra en TD (probablement).

Proposition 3. Le produit ensembliste de deux ensembles est un ensemble.

Preuve. Soient v_1 et v_2 deux ensembles. On considère

$$X := v_1 \times v_2 = \{\, (x, y) \mid x \in v_1 \text{ et } y \in v_2 \,\} \text{ (en naïf)} .$$

La notation (x, y) correspond à l'ensemble $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \wp(\wp(v_1 \cup v_2))$.

On applique ZF 4' dans l'ensemble ambiant $\wp(\wp(v_1 \cup v_2))$, on définit le produit comme la compréhension à l'aide de la formule

$$\varphi(z, v_1, v_2) := \exists x \, \exists y \, \Big(z = \{\{x\}, \{x, y\}\} \wedge x \in v_1 \wedge y \in v_2\Big).$$

C'est bien un élément de $\mathcal{U}$. $\square$

Définition 4. Une *fonction* (sous-entendu *totale*) d'un ensemble a dans un ensemble b est un sous-ensemble de $a \times b$ qui vérifie la propriété

$$\varphi(f,a,b) := \begin{pmatrix} f \subseteq a \times b \\ \wedge \\ \forall x\, \forall y\, \forall y'\, (x,y) \in f \wedge (x,y') \in f \to y = y' \\ \wedge \\ \forall x\, x \in a \to \exists y\, y \in b \wedge (x,y) \in f \end{pmatrix}.$$

On identifie ainsi f et son graphe.

Une *fonction partielle* d'un ensemble a dans un ensemble b est un sous-ensemble de $a \times b$ qui vérifie la propriété

$$\varphi(f,a,b) := \begin{pmatrix} f \subseteq a \times b \\ \wedge \\ \forall x\, \forall y\, \forall y'\, (x,y) \in f \wedge (x,y') \in f \to y = y' \end{pmatrix}.$$

On note b^a la collection des fonctions partielles de a dans b.

Proposition 4. La collection b^a est un ensemble, *i.e.* si a et b sont dans $\mathcal{U}$ alors b^a aussi.

Preuve. En exercice. □

Remarque 5 (Réunion indexée). Soit a une famille d'ensemble indexée par l'ensemble I, *i.e.* a est une fonction de domaine I. Si $i \in I$, on note a_i pour $a(i)$.

Proposition 5. Si I est un ensemble et a est une fonction de domaine I, alors $\bigcup_{i\in I} a_i$ est un ensemble. Autrement dit, si dans $\mathcal{U}$, ZF 1, ZF 2, ZF 3, ZF 4 sont vraies, et que I et a sont dans $\mathcal{U}$, et a est une fonction, alors la collection définie naïvement par $\bigcup_{i\in I} a_i$ appartient à $\mathcal{U}$.

Preuve. On pose $b := \{a_i \mid i \in I\}$. C'est bien un ensemble car b

est l'ensemble des images des éléments de I par a. On peut écrire a comme relation fonctionnelle :

$$\varphi(w_0, w_1, a) := (w_0, w_1) \in a.$$

On a donc que b est un ensemble avec ZF 4.

Et, $\bigcup_{i \in I} a_i = \bigcup_{z \in b} z$ donc on conclut par ZF 2. □

Proposition 6 (Propriété d'intersection). Si I est un ensemble non vide et a est une fonction de domaine I alors $\bigcap_{i \in I} a_i$ est un ensemble.

Preuve. On pose $c := \bigcup_{i \in I} a_i$ qui est un ensemble par ZF 2. On considère

$$\varphi(x, a, I) := \forall i \; i \in I \to x \in a_i.$$

Par compréhension (ZF 4') on construit l'ensemble

$$\bigcap_{i \in I} a_i := \{x \in c \mid \varphi(x, a, I)\}.$$

□

Proposition 7. Si I est un ensemble et a une fonction de domaine i alors $\prod_{i \in I} a_i$ est un ensemble.

Preuve. La collection $\prod_{i \in I} a_i$ est l'ensemble des fonctions de I dans $\bigcup_{i \in I} a_i$ telles que $f(i) \in a_i$ pour tout i. □

ZF 5 *Axiome de l'infini* : il existe un ensemble ayant une infinité d'élément

$$\exists x\, (\emptyset \in x \wedge \forall y\, (y \in x \to y \cup \{y\} \in x)).$$

On encode les entiers avec des ensembles :

- $0 \rightsquigarrow \emptyset$
- $1 \rightsquigarrow \{\emptyset\}$

- ▷ $2 \rightsquigarrow \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- ▷ $\vdots$
- ▷ $n + 1 \rightsquigarrow n \cup \{n\}$
- ▷ $\vdots$

Ainsi, on a bien $n = \{0, 1, \ldots, n - 1\}$.

> **Remarque 6.** Les français sont les seuls à considérer que l'axiome de bonne fondation ne fait pas partie de la théorie de ZF.