TD n° 1

I. Savoir lire la définition.

Ce sont des mesures de sécurité. Sinon :

$$(\lambda y.\ x\ y)[z/y] \neq_\alpha \lambda y.\ x\ z \qquad \leadsto \Delta\ x \neq y$$
$$(\lambda y.\ x\ y)\ [y/x] \neq_\alpha \lambda y.\ y\ y \qquad \leadsto \Delta\ y \notin Vl(N).$$

II. Classes d'équivalence pour $=_\beta$.

Q2.1. $\Omega\,\Omega \to_\beta \Omega\,\Omega$ et $\Omega \to_\beta \Omega$.

Ainsi, si $\Omega\Omega =_\beta \Omega$ alors, par confluence, il existe M un λ-terme tel que

$$\begin{tikzcd}
\Omega\Omega \arrow[dr, "*"', "\beta"] & & \Omega \arrow[dl, "*", "\beta"'] \\
& P &
\end{tikzcd}$$

C'est absurde car on aurait $\Omega\Omega = P = \Omega$ ($\Omega\Omega \to^*_\beta P$ implique $P = \Omega\Omega$ car il n'y a que 1 redex).

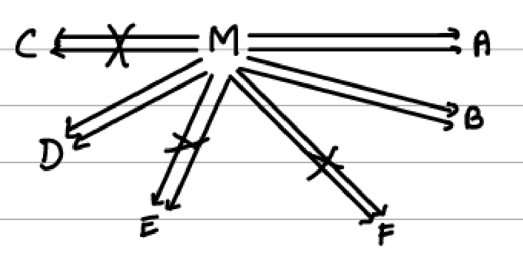
Q2.2. Soit N une forme normale avec $x \notin Vl(N)$

On pose :

$$M = (\lambda_x.\ N)\ \Omega.$$

III Propriété du diamant pour les réductions parallèles

Q3.1.



Par induction (3 cas)

Q3.2. $x^* := x$

$(\lambda x.\, M)^* := \lambda x.(M^*)$

$(M\ N)^* := \begin{cases} P^*[N^*/x] & \text{si } M = \lambda x.\, P \\ M^*\ N^* & \text{sinon} \end{cases}$

Lemme : si $M \Rrightarrow N$ alors $N \Rrightarrow M^*$ (par induction sur M)

D'où

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow] & \\ A \arrow[dr, Rightarrow] & & B \arrow[dl, Rightarrow] \\ & M^* & \end{tikzcd}$$

IV Normalisation faible et forte en λ-calcul pur.

Q4.1. Les propriétés (1), (2) et (3) restent vraies
La propriété (4) ne l'est pas :

on a

$$M := (\lambda x.\, x)\, M' \longrightarrow M'$$

mais

$$\underbrace{(y\ y)[M/y]}_{=\, M\ M} \not\longrightarrow \underbrace{(y\ y)[M'/y]}_{=\, M'\ M'}$$

Q4.2. Par induction sur $M \to M'$ (4 cas) :

* Cas $(\lambda x.\, M)\, N \to M[N/x]$. Supposons $x \in \mathrm{vl}(M)$ et $N \in \lambda I$. (*)

Par induction sur M, il y a 3 cas :

- si $M = y$ alors
  - si $y \neq x$ alors $M[N/x] = M \in \lambda I$.
  - si $y = x$ alors $M[N/x] = N \in \lambda I$.
- si $M = P\ Q$ alors par hypothèse d'induction on a : $P[N/x] \in \lambda I$ et $Q[N/x] \in \lambda I$ d'où $(P\ Q)[N/x] \in \lambda I$. par (ii)

- si $M = \lambda y.\, P$ avec $y \in \mathrm{vl}(P)$ alors $M[N/x] \in \lambda I$ car $P[N/x] \in \lambda I$.

* Cas $M N \to M' N$ avec $M \to M'$. Par hypothèse d'induction $M' \in \lambda I$.
avec $M \in \lambda I$, $N \in \lambda I$.

D'où $M' N \in \lambda I$ par (ii).

* Cas $M N \to M N'$ avec $N \to N'$. Par hypothèse d'induction $N' \in \lambda I$.
avec $M \in \lambda I$, $N \in \lambda I$.

D'où $M N' \in \lambda I$ par (ii).

* Cas $\lambda x. M \to \lambda x. M'$ avec $M \to M'$ et $M \in \lambda I$, $(\lambda x. M) \in \lambda I$, $M' \in \lambda I$ par hyp. d'ind°

Et, $vl(M') = vl(M)$ (preuve par induction)

d'où $(\lambda x. M') \in \lambda I$ car $x \in vl(M)$.

Q4.3. Supposons avoir une divergence issue de $(\lambda x. M) N$.

On a trois cas :

- soit $N \uparrow$ donc $N_i \to N_{i+1}$ avec $N_0 = N$ d'où $M[N_i/x] \to^{+} M[N_{i+1}/x]$ (avec au moins un pas car $x \in vl(M_i)$) et donc $M[N/x] \uparrow$
- soit $M \uparrow$ donc $M_i \to M_{i+1}$ avec $M_0 = M$ d'où $M_i[N/x] \to M_{i+1}[N/x]$ et donc $M[N/x] \uparrow$
- soit $M[N/x] \uparrow$

Dans tous les cas, $M[N/x] \uparrow$

Q4.4. Non : $(\lambda x. y)\, \Omega \uparrow$ mais $y[\Omega/x] = y \not\uparrow$

Q4.5. Mon instinct me dit non, mais vu qu'on ne peut pas faire "disparaître" une divergence, j'ai envie de dire oui.

Si on a une divergence, alors on ne peut pas l'éviter. Inversement, si on n'a pas de divergence, on ne peut pas aller dans une divergence.

En gros : tous les calculs dans λI sont utiles.

V Des λ-termes qui calculent : couples et prédécesseurs

Q5.1. On définit $succ := \lambda u. \lambda f. \lambda x. f(u f x)$.

$$\begin{aligned}
succ\ \underline{n} = (\lambda u f x. f(u f x))(\lambda f x. f^n x) &\to_\beta \lambda f x. f((\lambda f x. f^n x) f x) \\
&\to_\beta \lambda f x. f((\lambda x. f^n x)\, x) \\
&\to_\beta \lambda f x. f(f^n x) = \lambda f x. f^{n+1} x = \underline{n+1}.
\end{aligned}$$

D'où $succ\ \underline{n} \to^{*} \underline{n+1}$

Q5.2. On pose $fst := \lambda c.\, c\, \mathbf{T}$ et $snd := \lambda c.\, c\, \mathbf{F}$.

$$fst\ (M,N) = (\lambda c.c\ (\lambda x y. x))\ (\lambda f.\ (f M) N)$$
$$\to_\beta (\lambda f.\ (f M) N)\ (\lambda x y. x)$$
$$\to_\beta ((\lambda x y. x) M) N$$
$$\to_\beta (\lambda y. M) N$$
$$\to_\beta M$$

$$snd\ (M,N) = (\lambda c.c\ (\lambda x y. y))\ (\lambda f.\ (f M) N)$$
$$\to_\beta (\lambda f.\ (f M) N)\ (\lambda x y. y)$$
$$\to_\beta ((\lambda x y. y) M) N$$
$$\to_\beta (\lambda y. y) N$$
$$\to_\beta N$$

Q5.3. On pose : $Next := \lambda c.\ (succ\ (fst\ c),\ fst\ c)$

$$
\begin{aligned}
Next\ (\underline{n}, \underline{k}) &\to_\beta (succ\ (fst\ (\underline{n}, \underline{k})),\ fst\ (\underline{n}, \underline{k})) && \text{par Q5.2} \\
&\to_\beta^* (succ\ \underline{n},\ fst\ (\underline{n}, \underline{k})) && \text{par Q5.1} \\
&\to_\beta^* (\underline{n+1},\ fst\ (\underline{n}, \underline{k})) && \text{par Q5.2} \\
&\to_\beta^* (\underline{n+1},\ \underline{n})
\end{aligned}
$$

Q5.4 On pose $pred := \lambda n.\ snd\ (n\ Next\ (\underline{0}, \underline{0}))$.

VI Des λ-termes qui bouclent

Q6.1.
$$
\begin{aligned}
Y\ M &\to_\beta (\lambda x.\ M\ (x\ x))\ (\lambda x.\ M\ (x\ x)) \\
&\to_\beta M\ ((\lambda x.\ M\ (x\ x))\ (\lambda x.\ M\ (x\ x))) \\
&\leftarrow_\beta M\ (Y\ M)
\end{aligned}
$$

D'où $M(YM) =_\beta YM$.

Q6.2. On pose :

$F := \lambda f.\ \lambda n.\ \text{if } zero?(n) \text{ then } \underline{1}$
$\qquad \text{else } mult\ n\ (f\ (pred\ n))$

puis

$fact := YF$.

Q6.3. On pose $\gamma := \lambda x.\ x\ x\ x$ puis $\Gamma := \gamma\gamma$.

On a : degré de foisonnemment $(\Upsilon) = 3$
puis
$$\Upsilon\Upsilon \to_\beta \gamma\gamma\gamma \to_\beta \gamma\gamma\gamma\gamma \to_\beta \gamma\gamma\gamma\gamma\gamma \to_\beta \cdots$$

Le degré de foisonnemment croit linéairement.

Q6.4. Aucune idée...