

Théorèmes de point fixe.

Dans cette section, on va formaliser les raisonnements que l'on a réalisés en section ?? à l'aide du théorème de Knaster-Tarski.

Définition 1. Soit E un ensemble, une relation $\mathcal{R} \subseteq E^2$ est un *ordre partiel* si \mathcal{R} est :

- ▷ réflexive : $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$;
- ▷ transitive : $\forall x, y, z \in E, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \implies x \mathcal{R} z$;
- ▷ antisymétrique : $\forall x, y \in E, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x) \implies x = y$.

Exemple 1. Dans l'ensemble $E = \mathbb{N}$, les relations \leq et $|$ (division) sont des ordres partiels.

Définition 2. Soit (E, \sqsubseteq) un ordre partiel.

- ▷ Un *minorant* d'une partie $A \subseteq E$ est un $m \in E$ tel que

$$\forall x \in A, m \sqsubseteq x.$$

- ▷ Un *majorant* d'une partie $A \subseteq E$ est un $m' \in E$ tel que

$$\forall x \in A, x \sqsubseteq m'.$$

- ▷ Un *treillis complet* est un ordre partiel (E, \sqsubseteq) tel que toute partie $A \subseteq E$ admet un *plus petit majorant*, noté $\bigsqcup A$, et un *plus grand minorant*, noté $\bigsqcap A$.

- Remarque 1.** ▷ Pour tout minorant m de A , on a $m \sqsubseteq \prod A$.
- ▷ Pour tout majorant m' de A , on a $\sqcup A \sqsubseteq m'$.
 - ▷ Un minorant/majorant de A n'est pas nécessairement dans l'ensemble A . Ceci est notamment vrai pour $\prod A$ et $\sqcup A$.

Notation. On note généralement $\perp = \prod E$, et $\top = \sqcup E$.

- Exemple 2.** ▷ L'ensemble (\mathbb{N}, \leq) n'est pas un treillis complet : si A est infini, il n'admet pas de plus petit majorant.
- ▷ L'ensemble $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$ est un treillis complet avec la convention $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq \infty$.
 - ▷ L'ensemble $(\mathbb{N}, |)$ est un treillis complet :
 - pour $A \subseteq \mathbb{N}$ fini, on a

$$\sqcup A = \text{ppcm } A \quad \text{et} \quad \prod A = \text{pgcd } A;$$

- pour $A \subseteq \mathbb{N}$ infini, les relations ci-dessus restent valables avec la convention :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \mid 0.$$

Exemple 3 (Exemple très important de treillis complet). Soit E_0 un ensemble. Alors l'ensemble $(\wp(E_0), \subseteq)$ des parties de E_0 est un treillis complet. En particulier, on a :

$$\prod = \cap, \quad \sqcup = \cup, \quad \perp = \emptyset \quad \text{et} \quad \top = E_0.$$

Théorème 1 (Knaster-Tarski). Soit (E, \sqsubseteq) un treillis complet. Soit f une fonction croissante de E dans E .¹ On considère l'ensemble

$$F_f = \{x \in E \mid f(x) \sqsubseteq x\},$$

l'ensemble des *prépoints fixes* de f . Posons $m = \prod F_f$. Alors, m

est un point fixe de f , i.e. $f(m) = m$.

Preuve. Soit $y \in F_f$, alors $m \sqsubseteq y$, et par croissance de f , on a ainsi $f(m) \sqsubseteq f(y)$, ce qui implique $f(m) \sqsubseteq y$ par transitivité (et car $y \in F_f$). D'où, $f(m)$ est un minorant de F_f .

Or, par définition, $f(m) \sqsubseteq m$, et par croissance $f(f(m)) \sqsubseteq f(m)$, ce qui signifie que $f(m) \in F_f$. On en déduit $m \sqsubseteq f(m)$.

Par antisymétrie, on en conclut que $f(m) = m$. □

À la suite de ce théorème, on peut formaliser les raisonnements que l'on a réalisé en section ?? . Pour cela, il nous suffit d'appliquer le théorème 1 de Knaster-Tarski (abrégé en « théorème K-T »).

1 Définitions inductives de relations.

Remarque 2. Pour justifier la définition des relations, on applique le théorème K-T. En effet, on part de $E = E_1 * \dots * E_n$. Les relations sont des sous-ensembles de E , on travaille donc dans le treillis complet $(\wp(E), \sqsubseteq)$. On se donne une définition inductive d'une relation $\text{Rel} \subseteq E$. Pour cela, on s'appuie sur les règles d'inférences et on associe à chaque \mathcal{R}_i une fonction

$$f_i : \wp(E) \rightarrow \wp(E).$$

On montre (constate) que les f_i définies sont croissantes. Enfin, on pose pour $A \subseteq E$,

$$f(A) = f_1(A) \cup \dots \cup f_k(A).$$

La fonction $f \mapsto f(A)$ est croissante.

Par définition, Rel est défini comme le plus petit (pré)-point fixe de la fonction f , qui existe par le théorème K-T (théorème 1).

1. Ceci signifie que $\forall a, b \in E, \quad a \sqsubseteq b \implies f(a) \sqsubseteq f(b)$.

Exemple 4. Définissons $\text{le} \subseteq \text{nat} * \text{nat}$. On rappelle les règles d'inférences pour cette relation :

$$\frac{}{\text{le}(n, n)} \mathcal{L}_1 \quad \frac{\text{le}(n, k)}{\text{le}(n, \mathbf{S} k)} \mathcal{L}_2.$$

Avec un ensemble $A \subseteq \text{nat} * \text{nat}$, on définit

$$f_1(A) = \{(n, n) \mid n \in \text{nat}\},$$

$$f_2(A) = \{(n, \mathbf{S} k) \mid (n, k) \in A\};$$

et on pose enfin

$$f(A) = f_1(A) \cup f_2(A).$$

La définition formelle de la relation le est le plus petit point fixe de f .

Exemple 5 (Suite de l'exemple ??). Définissons $\text{triée} \subseteq \text{nlist}$. On rappelle les règles d'inférences pour cette relation :

$$\frac{}{\text{triée Nil}} \mathcal{T}_1 \quad \frac{}{\text{triée Cons}(x, \text{Nil})} \mathcal{T}_2,$$

$$\frac{\text{le}(x, y) \quad \text{triée Cons}(x, \text{Nil})}{\text{triée Cons}(x, \text{Cons}(y, \ell))} \mathcal{T}_3.$$

Avec un ensemble $A \subseteq \text{nlist}$, on définit

$$f_1(A) = \{\text{Nil}\},$$

$$f_2(A) = \{\text{Cons}(k, \text{Nil}) \mid k \in \text{nat}\},$$

$$f_3(A) = \left\{ \text{Cons}(x, \text{Cons}(y, \ell)) \mid \begin{array}{l} \text{Cons}(y, \ell) \in A \\ \text{le}(x, y) \end{array} \right\},$$

et on pose enfin

$$f(A) = f_1(A) \cup f_2(A).$$

La définition formelle de la relation le est le plus petit point fixe de f .

Remarque 3. Dans les exemples ci-avant, même si l'on ne l'a pas précisé, les fonctions f_i sont bien croissantes pour l'inclusion \subseteq . C'est ceci qui assure l'application du théorème K-T (théorème 1).

Comme dit dans la remarque ??, on ne définit pas de règles d'induction de la forme

$$\frac{\cancel{\neg \text{Rel}(x'_1, \dots, x'_n)}}{\cancel{\text{Rel}(x_1, \dots, x_n)}} \longrightarrow \text{C'est interdit!}$$

En effet, la fonction f définie n'est donc plus croissante.

Remarque 4. Une relation R définie comme le plus petit point fixe d'une fonction f vérifie, mais on ne demande en rien que l'on ait $A \subseteq f(A)$ quel que soit $A \subseteq E$. En effet, pour

$$f(\{(3, 2)\}) = \{(n, n) \mid n \in \text{nat}\} \cup \{(3, 1)\}$$

ne vérifie pas cette propriété.

2 Définitions inductives d'ensembles.

Exemple 6. On reprend le type t_2 défini à l'exemple ?? :

```
type t2 =
| F
| N2 of (t * nlist * t)
| N3 of (t * nat * t * nat * t)
```

Code 1 | *Un exemple de type*

On le définit en utilisant le théorème K-T (théorème 1) en po-

sant :

$$f_1(A) = \{\mathbf{F}\}$$

$$f_2(A) = \{(x, \ell, y) \mid \ell \in \mathbf{nlist} \text{ et } (x, y) \in A^2\}$$

$$f_3(A) = \left\{ (x, k_1, y, k_2, z) \mid \begin{array}{l} (x, y, z) \in A^3 \\ (k_1, k_2) \in \mathbf{nat}^2 \end{array} \right\},$$

puis, quel que soit A ,

$$f(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup f_3(A).$$

On pose ensuite \mathbf{t}_2 comme le plus petit point fixe de f .

Exemple 7. Avec $\mathbf{nat} = \{\mathbf{Z}, \mathbf{S Z}, \mathbf{S S Z}, \dots\}$, on utilise

$$f(A) = \{\mathbf{Z}\} \cup \{\mathbf{S } n \mid n \in A\},$$

et on pose \mathbf{nat} le plus petit point fixe de f .

Et si on retire le cas de base ? Que se passe-t-il ? On pose la fonction

$$f'(A) = \{\mathbf{S } n \mid n \in A\}.$$

Le plus petit point fixe de f est l'ensemble vide \emptyset . On ne définit donc pas les entiers naturels.

Remarque 5. Après quelques exemples, il est important de se demander comment f est définie. C'est une fonction de la forme

$$f : \wp(\mathbf{?}) \rightarrow \wp(\mathbf{?}).$$

Quel est l'ensemble noté « $\mathbf{?}$ » ? Quel est l'ensemble *ambient* ?

La réponse est : c'est l'ensemble des arbres étiquetés par des chaînes de caractères.

Remarque 6. Pour définir inductivement un relation, on peut considérer qu'on construit un ensemble de dérivation.

Par exemple, pour le , on aurait

$$f_2(A) = \left\{ \frac{\delta}{\text{le}(n, \mathcal{S} \ k)} \mid \begin{array}{l} \delta \text{ est une dérivation de } \text{le}(n, k) \text{ i.e.,} \\ \delta \text{ est une dérivation dont } \text{le}(n, k) \text{ est} \\ \text{à la racine} \end{array} \right\}.$$

3 Preuves par induction sur un ensemble inductif.

Remarque 7. Soit \mathfrak{t} un ensemble défini par induction par les constructeurs $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$. On pose f tel que \mathfrak{t} est le plus petit pré-point fixe de f .

On veut montrer $\forall x \in \mathfrak{t}, \mathcal{P}(x)$. Pour cela, on pose

$$A = \{x \in \mathfrak{t} \mid \mathcal{P}(x)\},$$

et on montre que $f(A) \subseteq A$, i.e. A est un pré-point fixe de f . Ceci implique, par définition de \mathfrak{t} , que $\mathfrak{t} \subseteq A$, d'où

$$\forall x, x \in \mathfrak{t} \implies \mathcal{P}(x).$$

Exemple 8. Expliquons ce que veut dire « montrer $f(A) \subseteq A$ » sur un exemple.

Pour nlist , on pose deux fonctions

$$\begin{aligned} f_1(A) &= \{\text{Nil}\} \\ f_2(A) &= \{\text{Cons}(k, \ell) \mid \ell \in A\} \\ &\cdot \end{aligned}$$

Pour montrer $f(A) \subseteq A$, il y a *deux* cas :

- ▷ (pour f_1) montrer $\mathcal{P}(\text{Nil})$;
- ▷ (pour f_2) avec l'hypothèse d'induction $\mathcal{P}(\ell)$, et $k \in \text{nat}$, montrer $\mathcal{P}(\text{Cons}(n, \ell))$.

4 Preuves par induction sur une relation inductive.

4.1 Une première approche...

Remarque 8. Soit Rel une relation définie comme le plus petit (pré)point fixe d'une fonction f , associée aux k règles d'inférences $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_k$. On veut montrer que

$$\forall (x_1, \dots, x_m) \in E, \quad \text{Rel}(x_1, \dots, x_m) \implies \mathcal{P}(x_1, \dots, x_m).$$

Pour cela, on pose $A = \{(x_1, \dots, x_m) \in E \mid \mathcal{P}(x_1, \dots, x_m)\}$, et on montre que $f(A) \subseteq A$, *i.e.* que A est un prépoint fixe de f . Ainsi, on aura $\text{Rel} \subseteq A$ et on aura donc montré

$$\forall (x_1, \dots, x_m) \in E, \quad \text{Rel}(x_1, \dots, x_m) \implies \mathcal{P}(x_1, \dots, x_m).$$

Exemple 9. Pour le, prouver $f(A) \subseteq A$ signifie prouver deux propriétés :

1. $\forall n \in \text{nat}, \mathcal{P}(n)$;
2. $\forall (n, k) \in \text{nat}^2, \underbrace{\mathcal{P}(n, k)}_{\text{hyp. ind.}} \implies \mathcal{P}(n, S k)$

Exemple 10. Pour triée, on a *trois* propriétés à prouver :

1. $\mathcal{P}(\text{Nil})$;
2. $\forall k \in \text{nat}, \mathcal{P}(\text{Cons}(k, \text{Nil}))$;

3. $\forall(x, y) \in \text{nat}^2, \forall \ell \in \text{nlist},$

$$\underbrace{\mathcal{P}(\text{Cons}(y, \ell))}_{\text{hyp.ind}} \wedge \text{le}(x, y) \implies \mathcal{P}(\text{Cons}(x, \text{Cons}(y, \ell))).$$

Remarque 9. Remarquons que dans l'exemple 10 ci-dessus, dans le 3ème cas, on n'a pas d'hypothèse $\text{triée}(\text{Cons}(y, \ell))$. Ceci vient du fait que, dans la remarque 7, l'ensemble A ne contient pas que des listes triées. La contrainte de la relation n'a pas été appliquée, on n'a donc pas accès à cette hypothèse.

4.2 Une approche plus astucieuse...

Remarque 10. On modifie légèrement le raisonnement présenté en remarque 7. On pose

$$A' = \{(x_1, \dots, x_m) \in E \mid \text{Rel}(x_1, \dots, x_m) \wedge \mathcal{P}(x_1, \dots, x_m)\}.$$

On montre $f(A') \subseteq A'$ et donc, par définition de Rel , on aura l'inclusion $\text{Rel} \subseteq A'$. Avec ce raisonnement, on peut utiliser des hypothèses, comme montré dans les exemples 11 et 12. Le but de la preuve n'est donc plus $\mathcal{P}(\dots)$ mais $\text{Rel}(\dots) \wedge \mathcal{P}(\dots)$.

En rouge sont écrits les différences avec le raisonnement précédent.

Exemple 11 (Version améliorée de l'exemple 9). Pour le, prouver $f(A) \subseteq A$ signifie prouver deux propriétés :

1. $\forall n \in \text{nat}, \text{le}(n, n) \wedge \mathcal{P}(n);$
2. $\forall(n, k) \in \text{nat}^2, \underbrace{\text{le}(n, k) \wedge \mathcal{P}(n, k)}_{\text{hyp. ind.}} \implies \text{le}(n, \text{S } k) \wedge \mathcal{P}(n, \text{S } k)$

Exemple 12 (Version améliorée de l'exemple 10). Pour triée, on a trois propriétés à prouver :

1. $\text{triée}(\text{Nil}) \wedge \mathcal{P}(\text{Nil})$;
2. $\forall k \in \text{nat}, \text{triée}(\text{Cons}(k, \text{Nil})) \wedge \mathcal{P}(\text{Cons}(k, \text{Nil}))$;
3. $\forall (x, y) \in \text{nat}^2, \forall \ell \in \text{nlist},$

$$\overbrace{\text{triée}(\text{Cons}(y, \ell)) \wedge \mathcal{P}(\text{Cons}(y, \ell)) \wedge \text{le}(x, y)}^{\text{hyp.ind}}$$



$$\text{triée}(\text{Cons}(x, \text{Cons}(y, \ell))) \wedge \mathcal{P}(\text{Cons}(x, \text{Cons}(y, \ell)))$$

5 Domaines et points fixes.

Définition 3. Soit (E, \sqsubseteq) un ordre partiel. Une *chaîne infinie* dans l'ensemble ordonné (E, \sqsubseteq) est une suite $(e_n)_{n \geq 0}$ telle que

$$e_0 \sqsubseteq e_1 \sqsubseteq e_2 \sqsubseteq \dots$$

On dit que (E, \sqsubseteq) est *complet* si pour toute chaîne infinie, il existe $\bigsqcup_{n \geq 0} e_n \in E$, un plus petit majorant dans E .

Si, de plus, E a un plus petit élément \perp , alors (E, \sqsubseteq) est un *domaine*.

Remarque 11. Un treillis complet est un domaine.

Théorème 2. Soit (E, \sqsubseteq) un domaine. Soit $f : E \rightarrow E$ continue :

- ▷ f est croissante ;
- ▷ pour toute chaîne infinie $(e_n)_{n \geq 0}$,

$$f\left(\bigsqcup_{n \geq 0} e_n\right) = \bigsqcup_{n \geq 0} f(e_n).$$

Les $(f(e_n))_{n \geq 0}$ forment une chaîne infinie par croissance de la fonction f .

On pose, quel que soit $x \in E$, $f^0(x) = x$, et pour tout entier $i \geq 0$, on définit $f^{i+1}(x) = f(f^i(x))$.

On pose enfin

$$\begin{aligned} \text{fix}(f) &= \bigsqcup_{n \geq 0} f^n(\perp) \\ &= \perp \sqcup f(\perp) \sqcup f^2(\perp) \sqcup \dots \end{aligned}$$

Alors, $\text{fix}(f)$ est le plus petit point fixe de f .

Preuve. La preuve viendra plus tard. □

Les définitions inductives par constructeurs ou règles d'inférences peuvent être définis par des fonctions continues. Et, on peut se placer dans le domaine $(\wp(E), \subseteq)$ pour définir les ensembles définis par inductions.

Exemple 13. Avec les listes d'entiers, on définit

$$\text{nat} = \underbrace{\emptyset}_{\perp} \cup \underbrace{\{\text{Nil}\}}_{f(\perp)} \cup \underbrace{\{\text{Cons}(k, \text{Nil}) \mid k \in \text{nat}\}}_{f^2(\perp)} \cup \dots$$