

Sémantique opérationnelle des expressions arithmétiques avec déclarations locales (LEA).

On suppose donnés \mathbb{Z} les entiers relatifs et \mathcal{V} un ensemble infini de variables (d'identifiants/d'identificateurs/de noms).

On définit LEA par la grammaire suivante :

$$a ::= \underline{k} \mid a_1 \oplus a_2 \mid \text{let } x = a_1 \text{ in } a_2 \mid x,$$

où $x \in \mathcal{V}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

En Rocq, on peut définir :

```
Inductive LEA : Set :=
| Cst : ℤ → LEA
| Add : LEA → LEA → LEA
| Let : ℳ → LEA → LEA → LEA
| Var : ℳ → LEA.
```

Code 1 | Définition inductive de LEA

Exemple 1. Voici quelques exemples d'expressions avec déclarations locales :

1. `let x = 3 in x ⊕ x;`
2. `let x = 2 in let y = x ⊕ 2 in x ⊕ y;`

- 3. $\text{let } x = (\text{let } y = \underline{5} \text{ in } y \oplus y) \text{ in } (\text{let } z = \underline{6} \text{ in } z \oplus \underline{2}) \oplus x;$
- 4. $\text{let } x = \underline{7} \oplus \underline{2} \text{ in } (\text{let } x = \underline{5} \text{ in } x \oplus x) \oplus x.$

1 Sémantique à grands pas sur LEA.

On définit une relation d'évaluation $\Downarrow : \text{LEA} * \mathbb{Z}^1$ définie par :

$$\frac{}{\underline{k} \Downarrow k} \quad k = k_1 + k_2 \quad \frac{a_1 \Downarrow k_1 \quad a_2 \Downarrow k_2}{a_1 \oplus a_2 \Downarrow k},$$

et on ajoute une règle pour le $\text{let } x = \dots \text{ in } \dots :$

$$\frac{a_1 \Downarrow k_1 \quad a_2 [k_1/x] \Downarrow k_1}{(\text{let } x = a_1 \text{ in } a_2) \Downarrow k_2}.$$

On note ici $a[k/x]$ la substitution de k à la place de x dans l'expression a . Ceci sera défini après.

Attention : on n'a pas de règles de la forme

$$\frac{}{x \Downarrow ?},$$

les variables sont censées disparaître avant qu'on arrive à elles.

Définition 1. Soit $a \in \text{LEA}$. L'ensemble des *variables libres* d'une expression a noté $\mathcal{V}\ell(a)$, et est défini par induction sur a de la manière suivante :

- ▷ $\mathcal{V}\ell(\underline{k}) = \emptyset;$
- ▷ $\mathcal{V}\ell(x) = \{x\};$
- ▷ $\mathcal{V}\ell(a_1 \oplus a_2) = \mathcal{V}\ell(a_1) \cup \mathcal{V}\ell(a_2);$
- ▷ $\mathcal{V}\ell(\text{let } x = a_1 \text{ in } a_2) = \mathcal{V}\ell(a_1) \cup (\mathcal{V}\ell(a_2) \setminus \{x\}).$

1. On surcharge encore les notations.

Exemple 2.

$$\mathcal{V}\ell(\text{let } x = \underline{3} \text{ in let } y = x \oplus \underline{2} \text{ in } y \oplus (z \oplus \underline{15})) = \{z\}.$$

Définition 2. Une expression $a \in \text{LEA}$ est *close* si $\mathcal{V}\ell(a) = \emptyset$. On note $\text{LEA}_0 \subseteq \text{LEA}$ l'ensemble des expressions arithmétiques de closes.

Définition 3. Soient $a \in \text{LEA}$, $x \in \mathcal{V}$ et $k \in \mathbb{Z}$. On définit par induction sur a (*quatre cas*) le résultat de la *substitution* de x par \underline{k} dans a , noté $a[\underline{k}/x]$ de la manière suivante :

- ▷ $\underline{k}'[\underline{k}/x] = \underline{k}'$;
- ▷ $(a_1 \oplus a_2)[\underline{k}/x] = (a_1[\underline{k}/x]) \oplus (a_2[\underline{k}/x])$;
- ▷ $y[\underline{k}/x] = \begin{cases} \underline{k} & \text{si } x = y \\ y & \text{si } x \neq y ; \end{cases}$
- ▷ $(\text{let } y = a_1 \text{ in } a_2)[\underline{k}/x] = \begin{cases} \text{let } y = a_1[\underline{k}/x] \text{ in } a_2 & \text{si } x = y \\ \text{let } y = a_1[\underline{k}/x] \text{ in } a_2[\underline{k}/x] & \text{si } x \neq y. \end{cases}$

2 Sémantique à petits pas sur LEA.

On définit la relation $\rightarrow \subseteq \text{LEA} * \text{LEA}$ inductivement par :

$$\begin{array}{c} k = k_1 + k_2 \quad \frac{}{k_1 \oplus k_2 \rightarrow \underline{k}} \mathcal{A}, \\ \frac{a_2 \rightarrow a'_2}{a_1 \oplus a_2 \rightarrow a_1 \oplus a'_2} \mathcal{C}_d \quad \text{et} \quad \frac{a_1 \rightarrow a'_1}{a_1 \oplus \underline{k} \rightarrow a'_1 \oplus \underline{k}} \mathcal{C}_g, \end{array}$$

puis les nouvelles règles pour le $\text{let } x = \dots \text{ in } \dots$:

$$\frac{a_1 \rightarrow a'_1}{\text{let } x = a_1 \text{ in } a_2 \rightarrow \text{let } x = a'_1 \text{ in } a_2} \mathcal{C}_1$$

$$\overline{\text{let } x = \underline{k} \text{ in } a} \rightarrow a[\underline{k}/x].$$

On peut démontrer l'équivalence des sémantiques à grands pas et à petits pas.

3 Sémantique contextuelle pour LEA.

On définit les contextes d'évaluations par la grammaire suivante :

$$\begin{aligned} E ::= & \quad [] \\ & \quad | a \oplus E \\ & \quad | E \oplus \underline{k} \\ & \quad | \text{let } x = E \text{ in } a. \end{aligned}$$

On définit deux relations \mapsto_a et \mapsto par les règles :

$$k = k_1 + k_2 \quad \frac{}{\underline{k}_1 \oplus \underline{k}_2 \mapsto_a \underline{k}_2} \quad \frac{}{\text{let } x = \underline{k} \text{ in } a \mapsto_a a[\underline{k}/x]},$$

et

$$\frac{a \mapsto_a a'}{E[a] \mapsto E[a']}.$$

4 Sémantique sur LEA avec environnement.

Définition 4. Soient A et B deux ensembles. Un *dictionnaire* sur (A, B) est une fonction partielle à domaine fini de A dans B .

Si D est un dictionnaire sur (A, B) , on note $D(x) = y$ lorsque D associe $y \in B$ à $x \in A$.

Le domaine d'un dictionnaire D est

$$\text{dom}(D) = \{x \in A \mid \exists y \in B, D(x) = y\}.$$

On note \emptyset le dictionnaire vide.

Pour un dictionnaire D sur (A, B) , deux éléments $x \in A$ et $y \in B$, on note $D[x \mapsto y]$ est le dictionnaire D' défini par

- ▷ $D'(x) = y$;
- ▷ $D'(z) = D(z)$ pour $z \in \text{dom}(D)$ tel que $z \neq x$.

On ne s'intéresse pas à la construction d'un tel type de donné, mais juste son utilisation.

On se donne un ensemble Env d'*environnements* notés $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \dots$ qui sont des dictionnaires sur $(\mathcal{V}, \mathbb{Z})$.

4.1 Sémantique à grands pas sur LEA avec environnements.

On définit la relation $\Downarrow \subseteq \text{LEA} * \text{Env} * \mathbb{Z}$, noté $a, \mathcal{E} \Downarrow k$ (« a s'évalue en k dans \mathcal{E} ») défini par

$$\frac{}{k, \mathcal{E} \Downarrow k} \quad k = k_1 + k_2 \quad \frac{a_1, \mathcal{E} \Downarrow k_1 \quad a_2, \mathcal{E} \Downarrow k_2}{a_1 \oplus a_2, \mathcal{E} \Downarrow k} \quad \mathcal{E}(x) = k \quad \frac{}{x, \mathcal{E} \Downarrow k},$$

$$\frac{a_1, \mathcal{E} \Downarrow k_1 \quad a_2, \mathcal{E}[x \mapsto k_1] \Downarrow k_2}{\text{let } x = a_1 \text{ in } a_2 \Downarrow k_2} .$$

Remarque 1. ▷ Dans cette définition, on n'a pas de substitutions (c'est donc plus facile à calculer).

- ▷ Si $\mathcal{V}\ell(a) \subseteq \text{dom}(\mathcal{E})$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a, \mathcal{E} \Downarrow k$.
- ▷ On a $a \Downarrow k$ (sans environnement) si, et seulement si $a, \emptyset \Downarrow k$ (avec environnement).

Pour les petits pas avec environnements, c'est un peu plus compliqué... On verra ça en TD. (Écraser les valeurs dans un dictionnaire, ça peut être problématique avec les petits pas.)