Réécriture.

Définition 1. Soit $\to$ une relation binaire sur un ensemble E. Le 2-uplet $(E, \to)$ est un *SRA*, pour *système de réécriture abstraite*.

Soit $x_0 \in E$. Une *divergence* issue de x_0 est une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout i, on a $x_i \to x_{i+1}$.

La relation $\to$ est *terminante* ou *termine* si et seulement si, quel que soit $x \in E$, il n'y a pas de divergence issue de x.

La relation $\to$ diverge s'il existe une divergence.

Exemple 1. En général, une relation réflexive est divergente.

Théorème 1. Une relation $(E, \to)$ est terminante si et seulement si elle satisfait le *principe d'induction bien fondée (PIBF)* suivant :

> Pour tout prédicat $\mathscr{P}$ sur E, si pour tout $x \in E$
>
> $$\Big[\forall y \in E, x \to y \text{ implique } \mathscr{P}(y)\Big] \text{ implique } \mathscr{P}(x)$$
>
> alors, pour tout $x \in E$, $\mathscr{P}(x)$.

En particulier, dans le principe d'induction bien fondée, on demande que les feuilles (les éléments sans successeurs) vérifient le prédicat.

Preuve. $\triangleright$ « PIBF $\implies$ terminaison ». Montrons que, quel que soit $x \in E$,

$$\mathscr{P}(x) \;:\; \text{« il n'y a pas de divergence issue de } x \text{ ».}$$

Soit $\mathrm{Next}(x) = \{y \in E \mid x \to y\}$. On suppose que, pour tout $y \in \mathrm{Next}(x)$, on a $\mathscr{P}(y)$. On en déduit $\mathscr{P}(x)$ car, sinon, une divergence ne passerait pas par $y \in \mathrm{Next}(x)$. Par le principe d'induction bien fondée, on en déduit

$$\forall x \in E, \mathscr{P}(x),$$

autrement dit, la relation $\to$ termine.

▷ « $\neg$PIBF $\implies$ diverge », par contraposée. On suppose qu'il existe un prédicat $\mathscr{P}$ tel que,

$$\forall x, (\forall y, x \to y \text{ implique } \mathscr{P}(y)) \text{ implique } \mathscr{P}(x),$$

et que l'on n'ait pas, $\forall x \in E, \mathscr{P}(x)$ autrement dit qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\neg\mathscr{P}(x)$.

Intéressons-nous à $\mathrm{Next}(x_0) = \{y \in E \mid x_0 \to y\}$. Si, pour tout $y \in \mathrm{Next}(x_0)$ on a $\mathscr{P}(y)$ alors par hypothèse $\mathscr{P}(x_0)$, ce qui est impossible. Ainsi, il existe $x_1 \in \mathrm{Next}(x_0)$ tel que $\neg\mathscr{P}(x_1)$. On itère ce raisonnement, ceci crée notre divergence.

□

Remarque 1. L'induction bien fondée s'appelle aussi l'induction *noethérienne*, en référence à Emmy Noether, mathématicienne allemande du IX–Xème siècle.

Une application de ce principe d'induction est le *lemme de König*.

Définition 2. ▷ Un arbre est *fini* s'il a un nombre fini de nœuds (*infini* sinon).

- ▷ Un arbre est à *branchement fini* si tout nœud a un nombre fini d'enfants immédiats.
- ▷ Une branche est *infinie* si elle contient un nombre infini de nœuds.

Lemme 1 (Lemme de König). Si un arbre est à branchement fini est infini alors il contient une branche infinie.

Preuve. On considère E l'ensemble des nœuds de l'arbre, et on définit la relation $\to$ par : on a $x \to y$ si y est enfant immédiat de x. On montre qu'un arbre à branchement fini sans branche infinie (*i.e.* la relation $\to$ termine) est fini. On choisit la propriété $\mathscr{P}(x)$: « le sous-arbre enraciné en x est fini. »

Montrons que, quel que soit x, $\mathscr{P}(x)$ et pour ce faire, utilisons le principe d'induction bien fondée puisque la relation $\to$ termine. On doit montrer que, si $\forall y \in \mathrm{Next}(x), \mathscr{P}(y)$ implique $\mathscr{P}(x)$. Ceci est vrai car l'embranchement est fini. □

1 Liens avec les définitions inductives.

On considère E l'ensemble inductif défini par la grammaire suivante :

$$t ::= \mathtt{F} \mid \mathtt{N}(t_1, k, t_2).$$

C'est aussi le plus petit point fixe de l'opérateur f associé (par le théorème de Knaster–Tarski).

On définit la relation $\to$ binaire sur E par : on a $x \to y$ si et seulement si on a $x = \mathtt{N}(y, k, z)$ ou $x = \mathtt{N}(z, k, y)$.

On sait que la relation $\to$ termine. En effet, l'ensemble des arbres finis est un point fixe de la fonction f, donc E ne contient que des arbres finis.

Le principe d'induction bien fondée nous dit que, pour $\mathscr{P}$ un prédicat sur E, pour montrer $\forall x, \mathscr{P}(x)$, il suffit de montrer que, quel que soit x, si $(\forall y, x \to y$ implique $\mathscr{P}(y))$ alors $\mathscr{P}(x)$. Autrement dit, il suffit de montrer que $\mathscr{P}(\mathtt{E})$ puis de montrer que, si $\mathscr{P}(t_1)$ et $\mathscr{P}(t_2)$ alors on a que $\mathscr{P}(\mathtt{N}(t_1, k, t_2))$.

On retrouve le principe d'induction usuel.

Ce même raisonnement, on peut le réaliser quel que soit l'ensemble inductif, car la relation de « sous-élément » termine toujours puisque il n'y a que des éléments finis dans l'ensemble inductif.

2 Établir la terminaison.

Théorème 2. Soient $(B, >)$ un SRA terminant, et $(A, \to)$ un SRA. Soit $\varphi : A \to B$ un *plongement*, c'est à dire une application vérifiant

$$\forall a, a' \in A, \qquad a \to a' \text{ implique } \varphi(a) > \varphi(a').$$

Alors, la relation $\to$ termine.

Théorème 3. Soient $(A, \to_A)$ et $(B, \to_B)$ deux SRA.

Le *produit lexicographique* de $(A, \to_A)$ et $(B, \to_B)$ est le SRA, que l'on notera $(A \times B, \to_{A\times B})$, défini par

$$(a, b) \to_{A\times B} (a', b') \text{ ssi } \begin{cases} (1)\ a \to_A a' \text{ (et } b' \text{ quelconque)} \\ \qquad\quad \text{ou} \\ (2)\ a = a' \text{ et } b \to_B b' \end{cases}.$$

Alors, les relations $(A, \to_A)$ et $(B, \to_B)$ terminent si et seulement si la relation $(A \times B, \to_{A\times B})$ termine.

Preuve. ▷ « $\implies$ ». Supposons qu'il existe une divergence pour $(A \times B, \to_{A\times B})$:

$$(a_0, b_0) \to_{A\times B} (a_1, b_1) \to_{A\times B} (a_2, b_2) \to_{A\times B} \cdots.$$

Dans cette divergence,

– soit on a utilisé (1) une infinité de fois, et alors en projetant sur la première composante et en ne conservant que les fois où l'on utilise (1), on obtient une divergence $\to_A$;
– soit on a utilisé (1) un nombre fini de fois, et alors à partir d'un certain rang N, pour tout $i \geq N$, on a l'égalité $a_i = a_N$, et donc on obtient une divergence pour $\to_B$:

$$b_N \to_B b_{N+1} \to_B b_{N+2} \to \cdots .$$

▷ « $\Longleftarrow$ ». On montre que, si on a une divergence pour $\to_A$ alors on a une divergence pour $\to_{A\times B}$ (on utilise (1) une infinité de fois) ; puis que si on a une divergence pour $\to_B$ alors on a une divergence pour $\to_{A\times B}$ (on utilise (2) une infinité de fois).

□

3 Application à l'algorithme d'unification.

On note $(\mathscr{P}, \sigma) \to (\mathscr{P}', \sigma')$ la relation définie par l'algorithme d'unification (on néglige le cas où $(\mathscr{P}, \sigma) \to \bot$).

On note $|\mathscr{P}|$ la somme des tailles (vues comme des arbres) des contraintes de $\mathscr{P}$ et $|\mathsf{Vars}\ \mathscr{P}|$ le nombre de variables.

On définit $\varphi : (\mathscr{P}, \sigma) \mapsto (|\mathsf{Vars}\ \mathscr{P}|, |\mathscr{P}|)$.

Rappelons la définition de la relation $\to$ dans l'algorithme d'unification :

1. $(\{f(t_1, \ldots, t_k) \stackrel{?}{=} f(u_1, \ldots, u_n) \sqcup \mathscr{P}, \sigma\}) \to$
 $(\{t_1 \stackrel{?}{=} u_1, \ldots, t_k \stackrel{?}{=} u_k\} \cup \mathscr{P}, \sigma)$;
2. $(\{f(t_1, \ldots, t_k) \stackrel{?}{=} g(u_1, \ldots, u_n) \sqcup \mathscr{P}, \sigma\}) \to \bot$ si $f \neq g$;
3. $(\{X \stackrel{?}{=} t\} \sqcup \mathscr{P}, \sigma) \to (\mathscr{P}[{}^t/_X], [{}^t/_X] \circ \sigma)$ où $X \notin \mathsf{Vars}(t)$;

4. $(\{X \stackrel{?}{=} t\} \sqcup \mathscr{P}, \sigma) \to \bot$ si $X \in \mathsf{Vars}(t)$ et $t \neq X$;
5. $(\{X \stackrel{?}{=} X\} \sqcup \mathscr{P}, \sigma) \to (\mathscr{P}, \sigma)$.

Appliquons le plongement pour montrer que $\to$ termine. On s'appuie sur le fait que le produit $(\mathbb{N}, >) \times (\mathbb{N}, >)$ est terminant (produit lexicographique).

Dans 1, $|\mathsf{Vars}\ \mathscr{P}|$ ne change pas et $|\mathscr{P}|$ diminue. Puis dans 3, $|\mathsf{Vars}\ \mathscr{P}|$ diminue. Et dans 5, on a $|\mathsf{Vars}\ \mathscr{P}|$ qui décroit ou ne change pas, mais $|\mathscr{P}|$ diminue. Dans les autres cas, on arrive, soit sur $\bot$.

On en conclut que l'algorithme d'unification termine.

4 Multiensembles.

Définition 3. Soit A un ensemble. Un *multiensemble* sur A est la donnée d'une fonction $M : A \to \mathbb{N}$. Un multiensemble M est *fini* si $\{a \in A \mid M(a) > 0\}$ est fini.

Le multiensemble vide, noté $\emptyset$, vaut $a \mapsto 0$.

Pour deux multiensembles M_1 et M_2 sur A, on définit

- ▷ $(M_1 \cup M_2)(a) = M_1(a) + M_2(a)$;
- ▷ $(M_1 \ominus M_2)(a) = M_1(a) \ominus M_2(a)$ où l'on a $(n + k) \ominus n = k$ mais $n \ominus (n + k) = 0$.

On note $M_1 \subseteq M_2$ si, pour tout $a \in A$, on a $M_1(a) \leq M_2(a)$.

La *taille* de M est $|M| = \sum_{a \in A} M(a)$.

On note $x \in M$ dès lors que $x \in A$ et que $M(x) > 0$.

Exemple 2. Si on lit $\{1, 1, 1, 2, 3, 4, 3, 5\}$ comme un multiensemble M, on obtient que $M(1) = 3$, et $M(2) = 1$, et $M(3) = 2$, et $M(4) = 1$, et $M(5) = 1$, et finalement pour tout autre entier n, $M(n) = 0$.

Définition 4 (Extension multiensemble.). Soit $(A, >)$ un SRA. On lui associe une relation notée $>_{\mathrm{mul}}$ définie sur les multiensembles *finis* sur A en définissant $M >_{\mathrm{mul}} N$ si et seulement s'il existe X, Y deux multiensembles sur A tels que

- ▷ $\emptyset \neq X \subseteq M$;
- ▷ $N = (M \ominus X) \cup Y$ [1]
- ▷ $\forall y \in Y, \exists x \in X, x > y$.

Les multiensembles X et Y sont les « témoins » de $M >_{\mathrm{mul}} N$.

Exemple 3. Dans $(\mathbb{N}, >)$, on a

$$\{1, 2, \underbrace{5}_{X}\} >_{\mathrm{mul}} \{1, 2, \underbrace{4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3}_{Y}\}.$$

Théorème 4. La relation $>$ termine si et seulement si $>_{\mathrm{mul}}$ termine.

Preuve.
- ▷ « $\Longleftarrow$ ». Une divergence de $>$ induit une divergence de $>_{\mathrm{mul}}$.
- ▷ « $\Longrightarrow$ ». On se donne une divergence pour $>_{\mathrm{mul}}$:

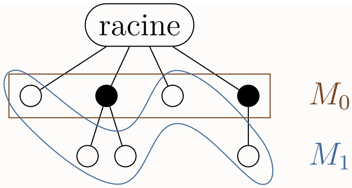
$$M_0 >_{\mathrm{mul}} M_1 >_{\mathrm{mul}} M_2 >_{\mathrm{mul}} \cdots,$$

et on montre que $>$ diverge À chaque $M_i >_{\mathrm{mul}} M_{i+1}$ correspondent X_i et Y_i suivant la définition de $>_{\mathrm{mul}}$.

On sait qu'il y a une infinité de i tel que $Y_i \neq \emptyset$. En effet, si au bout d'un moment Y_i est toujours vide alors $|M_i|$ décroit strictement, impossible.

Représentons cela sur un arbre.

1. C'est ici la soustraction usuelle : il n'y a pas de soustraction qui « pose problème ».



On itère le parcours en obtenant un arbre à branchement fini, qui est infini (observation du dessin) donc par le lemme de König il a une branche infinie. Par construction, un enfant de a correspond à $a > a'$, d'où divergence pour $>$.

□

Théorème 5 (Récursion bien fondée). On appelle *fonction* de A_1 dans A_2 la donnée d'une relation fonctionnelle totale incluse dans $A_1 \times A_2$. On note $f : A_1 \to A_2$.

On se donne $(A, >)$ un SRA **terminant**.

Pour $a \in A$, on note

- $\mathrm{Pred}(a) := \{a' \mid a > a'\}$; [2]
- $\mathrm{Pred}^+(a) := \{a' \mid a >^+ a'\}$;
- $\mathrm{Pred}^\star(a) := \{a' \mid a >^\star a'\} = \mathrm{Pred}^+(a) \cup \{a\}$. [3]

Pour $f : A \to B$ et $A' \subseteq A$, on note $f \restriction A' := \{(a, f(a)) \mid a \in A'\}$.

On se donne une fonction F telle que, pour tout $a \in A$, et tout $h \in \mathrm{Pred}(a) \to B$, on a $F(a, h) \in B$. Alors, il existe une unique fonction $f : A \to B$ telle que

$$\forall a \in A, f(a) = F(a, f \restriction (\mathrm{Pred}(a))).$$

Preuve. Unicité. Soient f, g telles que, pour tout $a \in A$, on ait

2. On le notait Next avant, mais le successeur pour $>$ est un prédécesseur pour $<$ (ce qui est plus usuel).

3. On rappelle que l'on note $\mathcal{R}^+$ et respectivement $\mathcal{R}^\star$ la clôture transitive, et respectivement la clôture réflexive et transitive.

- $f(a) = F(a, f \restriction \mathrm{Pred}(a))$;
- $g(a) = F(a, g \restriction \mathrm{Pred}(a))$.

Montrons que $\forall a \in A, f(a) = g(a)$ par induction bien fondée (car $>$ termine).

Soit $a \in A$. On suppose $\forall b \in \mathrm{Pred}(b), f(b) = g(b)$ l'hypothèse d'induction. Alors, $f \restriction \mathrm{Pred}(a) = g \restriction \mathrm{Pred}(a)$, et donc $f(a) = g(a)$.

Existence. On montre, par induction bien fondée, que $\mathscr{P}(a)$, la propriété ci-dessous, est vraie quel que soit $a \in A$:

$$\exists f_a : \mathrm{Pred}^\star(a) \to B, \forall b \in \mathrm{Pred}^\star(a), f_a(b) = F(b, f \restriction \mathrm{Pred}(b)).$$

Soit $a \in A$. On suppose $\forall b \in \mathrm{Pred}(a), \mathscr{P}(b)$ (f_b existe). Posons la relation $h := \bigcup_{b \in \mathrm{Pred}(a)} f_b$. La relation h est

- fonctionnelle (*c.f.* preuve d'unicité) ;
- définie sur $\mathrm{Pred}^+(a)$.

On conclut la preuve en posant

$$f_a := h \cup \{(a, F(a, h))\}.$$

□

Exemple 4. Pour définir une fonction `length` : nlist $\to$ nat. La relation $>$ sur nlist où $k :: \ell > \ell$ est une relation bien fondée. On pose la fonction $F(\ell, h)$ par :

```
let F ℓ h = match ℓ with
| [] -> 0
| x :: xs -> 1 + h(xs)
```

Code 1 | *Définition récursive bien fondée de* `length`

où l'on a ici `xs` $\in \mathrm{Pred}($`x :: xs`$)$.

5 Confluence.

Définition 5. Soit $(A, \to)$ un SRA. On dit que $\to$ est *confluente* en $t \in A$ si, dès que $t \to^\star u_1$ et $t \to^\star u_2$ il existe t' tel que $u_1 \to^\star t'$ et $u_2 \to^\star t'$.

$$\begin{tikzcd} & t \arrow[dl, "\star"'] \arrow[dr, "\star"] & \\ u_1 \arrow[dr, dashed, "\star"'] & & u_2 \arrow[dl, dashed, "\star"] \\ & t' & \end{tikzcd}.$$

Les flèches en pointillés représentent l'existence.

On dit que $\to$ est *confluente* si $\to$ est confluente en tout $a \in A$.

La propriété du diamant correspond au diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} & t \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ u_1 \arrow[dr, dashed] & & u_2 \arrow[dl, dashed] \\ & t' & \end{tikzcd},$$

c'est-à-dire si $t \to u_1$ et $t \to u_2$ alors il existe t' tel que $u_1 \to t'$ et $u_2 \to t'$.

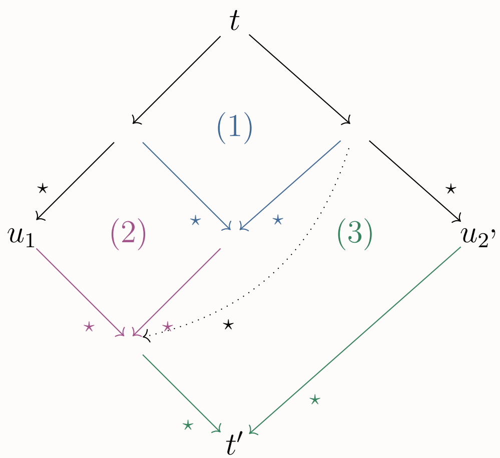
La propriété de *confluence locale* correspond au diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} & t \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ u_1 \arrow[dr, dashed, "\star"'] & & u_2 \arrow[dl, dashed, "\star"] \\ & t' & \end{tikzcd},$$

c'est-à-dire si $t \to u_1$ et $t \to u_2$ alors il existe t' tel que $u_1 \to \star t'$ et $u_2 \to \star t'$.

Lemme 2 (Lemme de Newman). Soit $(A, \to)$ terminante et localement confluente. Alors, $(A, \to)$ confluente.

Preuve. On montre que, quel que soit $t \in A$, que $\to$ est confluente en t par induction bien fondée. On suppose que quel que soit t'' tel que $t \to t'$, alors la relation $\to$ est confluente en t' ; Montrons la confluence en t. Soit $t \to^\star u_1$ et $t \to^\star u_2$. Si $t = t_1$ ou $t = u_2$, c'est immédiat. On suppose donc



où l'on utilise

- ▷ (1) par confluence locale ;
- ▷ (2) par hypothèse d'induction ;
- ▷ (3) par hypothèse d'induction.

□

Remarque 2. L'hypothèse de relation terminante est cruciale. En effet, la relation ci-dessous est un contre exemple : la relation $\to$ est non terminante, localement confluente mais pas confluente.

$$\begin{tikzcd} \bullet & \bullet \arrow[l] \arrow[r, bend right] & \bullet \arrow[l, bend right] \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}.$$

6 Système de réécriture de mots.

Les systèmes de réécriture de mots sont parmi les systèmes de réécriture les plus simples. On peut définir un système de réécriture de termes, où « terme » correspond à « terme » dans la partie Typage, mais on ne les étudiera pas dans ce cours.

Définition 6 (*c.f.* cours de FDI)**.** On se donne Σ un ensemble de lettres. On note :

- ▷ $\Sigma^\star$ l'ensemble des mots sur Σ,
- ▷ ε le mot vide,
- ▷ uv la concaténation de u et v (avec $u, v \in \Sigma^\star$).

Définition 7. Un *SRM* (*système de réécriture de mots*) sur Σ est donné par un ensemble $\mathscr{R}$ de couples de mots sur Σ noté généralement

$$\mathscr{R} = \{(\ell, r) \mid \ell \neq \varepsilon\}.$$

Le SRM $\mathscr{R}$ détermine une relation binaire sur $\Sigma^\star$ définie par $u \to_{\mathscr{R}} v$ dès lors qu'il existe $(x, y) \in (\Sigma^\star)^2$ et $(\ell, r) \in \mathscr{R}$ tels que l'on ait $u = x\ell y$ et $v = xry$.

Exemple 5. Sur $\Sigma = \{a, b, c\}$ et $\mathscr{R}_0$ donné par

$$\begin{aligned} ab &\to ac \\ ccc &\to bb \\ aa &\to a, \end{aligned}$$

autrement dit

$$\mathscr{R}_0 = \{(ab, ac), (ccc, bb), (aa, a)\},$$

et alors

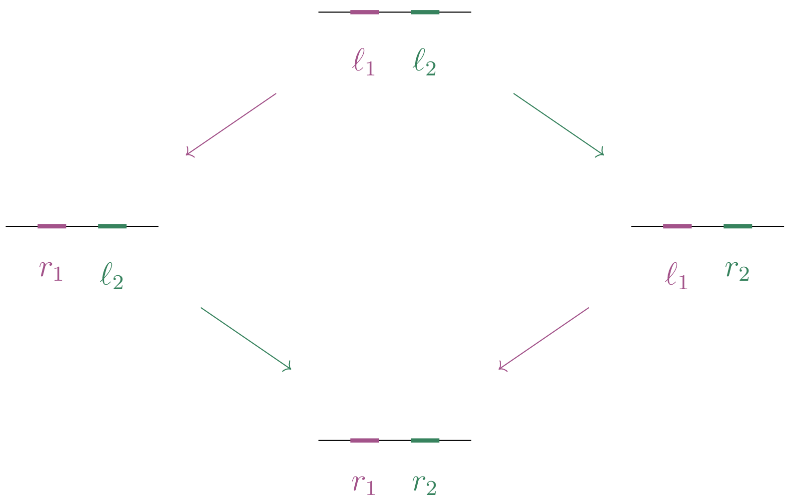
$$\begin{tikzcd} aabab \arrow[r, "\mathscr{R}"'] \arrow[d, "\mathscr{R}"'] \arrow[dr, "\mathscr{R}"'] & aacab \\ aabac & abab \end{tikzcd}.$$

La relation $\to_{\mathscr{R}_0}$ est-elle terminante ? Oui, il suffit de réaliser un plongement sur le produit lexicographique donné par $\varphi : u \mapsto (|u|, \#_b(u))$, où $\#_b(u)$ est le nombre de b dans u et $|u|$ est la taille de u.

6.1 Étude de la confluence locale dans les SRM.

Soient $(\ell_1, r_1), (\ell_2, r_2) \in \mathscr{R}$ tels que $t \to_{\mathscr{R}} u_1$ avec (ℓ_1, r_1) et $t \to_{\mathscr{R}}$ avec (ℓ_2, r_2).

***1er cas* : indépendance.** On a la propriété du diamant.



.

***2ème cas* : inclusion.** S'il existe (ℓ, ℓ') tel que $\ell_1 = \ell\ell_2\ell'$, alors, on a que $\ell_1 \to_{\mathscr{R}} r_1$ et $\ell_2 \to_{\mathscr{R}} \ell r_2 \ell'$.

Peut-on confluer ? Ce n'est pas évident.

***3ème cas* : overlap.** S'il existe (ℓ, ℓ', ℓ'') tel que $\ell_1 = \ell\ell'$ et $\ell_2 = \ell'\ell''$, alors $t \to r_1\ell''$ et $t \to \ell r_2$.

Peut-on confluer ? Ce n'est pas évident.

Définition 8. Soit $\mathscr{R}$ un SRM sur Σ. Soient $(\ell_1, r_1), (\ell_2, r_2) \in \mathscr{R}$. Supposons qu'il existe des mots z, v_1, v_2 tels que

- ▷ $|z| < |\ell_1|$;
- ▷ $\ell_1 v_1 = z \ell_2 v_2$;
- ▷ $\varepsilon \in \{v_1, v_2\}$.

On dit alors que $\{r_1 v_1, z r_2 v_2\}$ est une paire critique de $\mathscr{R}$.

Exemple 6. Avec $\Sigma = \{a, b, c\}$ avec le SRM $\mathscr{R}$ défini par

$$\begin{array}{rrcl} (1) & aba & \to & abc \\ (2) & ab & \to & ba \end{array},$$

on se demande si

- ▷ $\to_{\mathscr{R}}$ termine ? Oui avec le nombre de a et le nombre d'inversions a–b.
- ▷ quelles sont les paires critiques ? On procède cas par cas :
  - (1) avec (2), on a $aba \to abc$ et $aba \to baa$ donc $\{abc, baa\}$ est critique ;
  - (1) avec (1), on a $ababa \to abcba$ et $ababa \to ababc$ donc $\{abcba, ababc\}$ est critique ;
  - (2) avec (2), il n'y a pas de paires critiques.

Pourquoi s'intéresser aux paires critiques ? Et bien, cela prend son sens grâce au théorème ci-dessous.

Théorème 6. La relation $\rightarrow_{\mathscr{R}}$ est localement confluente si et seulement si toutes ses paires critiques sont *joignables*, c'est-à-dire que, pour $\{u_1, u_2\}$ critique, il existe t' tel que $u_1 \rightarrow^\star t'$ et $u_2 \rightarrow^\star t'$.