Logique modale pour systèmes de transitions.

1 Modèle de Kripke.

Dans un système de transition $TS = (S, \mathrm{Act}, \to, I, \mathrm{AP}, L)$, on différencie

- la partie ***transitions*** $K = (S, \mathrm{Act}, \to)$;
- la partie ***logique*** $M = (K, \mathrm{AP}, L)$;
- la partie ***structure « pointée »*** (M, I).

Définition 1. Une *structure de Kripke* (sur AP) est de la forme

$$K = (S, \mathrm{Act}, \to).$$

Un *modèle de Kripke* sur Act et AP est de la forme

$$M = (K, \mathrm{AP}, L)$$

où K est une structure de Kripke sur Act.

2 Logique de Hennessy-Milner.

Fixons Act et AP.

Définition 2. On définit les formules de la logique HML par :

$$\begin{aligned}\phi, \psi ::= {} & \mathtt{a} && \mathtt{a} \in \mathrm{AP}\\ & \mid \phi \wedge \psi \mid \top \\ & \mid \phi \vee \psi \mid \bot \\ & \mid \neg\phi \\ & \mid \underbrace{\langle\alpha\rangle}_{\Diamond}\ \phi \mid \underbrace{[\alpha]}_{\Box}\ \phi && \alpha \in \mathrm{Act}.\end{aligned}$$

Définition 3. Pour $M = (S, \mathrm{Act}, \rightarrow, \mathrm{AP}, L)$, on définit $[\![\phi]\!] \in \wp(S)$ par induction sur ϕ :

- ▷ $[\![\mathtt{a}]\!] := \{s \in S \mid \mathtt{a} \in L(s)\}$;
- ▷ $[\![\top]\!] := S$;
- ▷ $[\![\bot]\!] := \emptyset$;
- ▷ $[\![\phi \wedge \psi]\!] := [\![\phi]\!] \cap [\![\psi]\!]$;
- ▷ $[\![\phi \vee \psi]\!] := [\![\phi]\!] \cup [\![\psi]\!]$;
- ▷ $[\![\neg\phi]\!] := \wp(S) \setminus [\![\phi]\!]$;
- ▷ $[\![\langle\alpha\rangle\phi]\!] := \{s \in S \mid \exists s' \in S, s \xrightarrow{\alpha} s' \text{ et } s' \in [\![\phi]\!]\}$;
- ▷ $[\![[\alpha]\phi]\!] := \{s \in S \mid \forall s' \in S, s \xrightarrow{\alpha} s' \text{ implique } s' \in [\![\phi]\!]\}$;

Notation. On note $s \Vdash \phi$ si $s \in [\![\phi]\!]$.

Définition 4. Soient Act, AP et soit ϕ une formule HML.

1. Pour $M = (S, \mathrm{Act}, \rightarrow, \mathrm{AP}, L)$, on dit que $s \in S$ ***satisfait*** ϕ si $s \Vdash \phi$.
2. On dit que ϕ est ***valide*** dans $M = (S, \mathrm{Act}, \rightarrow, \mathrm{AP}, L)$, que l'on note $M \models \phi$, si

$$\forall s \in S, \quad s \Vdash \phi.$$

3. On dit que ϕ est ***valide***, que l'on note $\models \phi$, si ϕ est valide dans tout modèle M.

Exemple 1 (Logique LML.). Soit $\mathrm{Act} = \mathbf{1} = \{\bullet\}$. Soit

$$M((\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega) := (S, \mathbf{1}, \to, \mathrm{AP}, L)$$

où

- $S = (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$;
- pour tout σ, on a que $\sigma \xrightarrow{\bullet} \sigma \restriction 1$;
- $L(\sigma) = \sigma(0)$.

On a

$$\sigma \Vdash \langle\bullet\rangle\phi \iff \sigma \restriction 1 \Vdash \phi \iff \phi \Vdash [\bullet]\phi,$$

donc $\langle\bullet\rangle$ et $[\bullet]$ correspondent ainsi à la modalité $\bigcirc$ « next ».

De plus, sur ce système, on a $\sigma \sim s'$ ssi $\sigma = \sigma'$.

3 Équivalences logiques.

3.1 Équivalences logiques pour les formules.

Définition 5. Soient AP, Act, et soient ϕ, ψ des formules. On note $\phi \equiv \psi$ ssi

$$\forall M = (S, \mathrm{Act}, \to, \mathrm{AP}, L), \quad [\![\phi = \psi]\!],$$

autrement dit $\forall M, \forall s \in S, \quad s \Vdash \phi \iff s \Vdash \psi$.

Lemme 1. On a que $[\alpha]-$ et $\langle\alpha\rangle-$ sont duaux par De Morgan :

$$[\alpha]\phi \equiv \neg\langle\alpha\rangle\neg\phi \quad \text{et} \quad \langle\alpha\rangle\phi \equiv \neg[\alpha]\neg\phi.$$

De plus, comme $\langle\alpha\rangle-$ est défini comme quantification existentielle, on a

$$\langle\alpha\rangle(\phi \vee \psi) \equiv \langle\alpha\rangle\phi \vee \langle\alpha\rangle\psi \quad \text{et} \quad \langle\alpha\rangle\bot \equiv \bot.$$

De même, comme $[\alpha]-$ est défini comme quantification universelle, on a

$$[\alpha](\phi \wedge \psi) \equiv [\alpha]\phi \wedge [\alpha]\psi \quad \text{et} \quad [\alpha]\top \equiv \top.$$

3.2 Équivalences logiques pour les états.

Définition 6. Soient Act et AP. On se donne M_1, et M_2 deux modèles de Kripke. Pour $s_1 \in S_1$ et $s_2 \in S_2$, on note

$$s_1 \equiv s_2 \qquad \text{ssi} \qquad \forall \phi, \quad s_1 \Vdash \phi \iff s_2 \Vdash \phi.$$

Remarque 1. On aurait pu définir une telle équivalence pour LML, mais on aurait que $\sigma_1 \equiv \sigma_2$ ssi $\sigma_1 = \sigma_2$, ce qui n'est pas très intéressant. Avec des modèles de Kripke et la logique HML, on a des états différents qui sont équivalents.

Théorème 1. Si $s_1 \sim s_2$ alors $s_1 \equiv s_2$.

Preuve. Par induction sur ϕ, on montre que

$$s_1 \sim s_2 \implies (s_1 \Vdash \phi \iff s_2 \Vdash \phi).$$

Cas de $\mathsf{a} \in \mathrm{AP}$. Si $s_1 \sim s_2$ alors $L_1(s_1) = L_2(s_2)$ donc $s_1 \Vdash \mathsf{a}$ ssi $s_2 \Vdash \mathsf{a}$.

Cas de $- \wedge -$, $- \vee -$, $\top$, $\bot$, et $\neg-$. On applique l'hypothèse d'induction et/ou l'hypothèse $s_1 \sim s_2$, et on conclut.

Cas de $\langle\alpha\rangle-$. Supposons $s_1 \sim s_2$. Supposons $s_1 \Vdash \langle\alpha\rangle\phi$. Il existe donc s_1' tel que $s_1 \xrightarrow{\alpha} s_1'$ et $s_1' \Vdash \phi$. Par bisimulation

$$\begin{tikzcd} s_1 \arrow[r, dash, "\sim"] \arrow[d, "\alpha"] & s_2 \arrow[d, dashed, "\alpha"] \\ s_1' \arrow[r, dash, dashed, "\sim"] & s_2' \end{tikzcd},$$

il existe donc s_2' tel que $s_2 \xrightarrow{\alpha} s_2'$ et $s_1' \sim s_2'$. Donc, par hypothèse d'induction, on a que $s_2' \Vdash \phi$. On a donc $s_2 \Vdash \langle\alpha\rangle\phi$. On procédant de même dans l'autre cas, on a bien que

$$s_1 \Vdash \langle\alpha\rangle\phi \iff s_2 \Vdash \langle\alpha\rangle\phi.$$

Cas de $[\alpha]-$. On a que $[\alpha]\phi \equiv \neg\langle\alpha\rangle\neg\phi$.

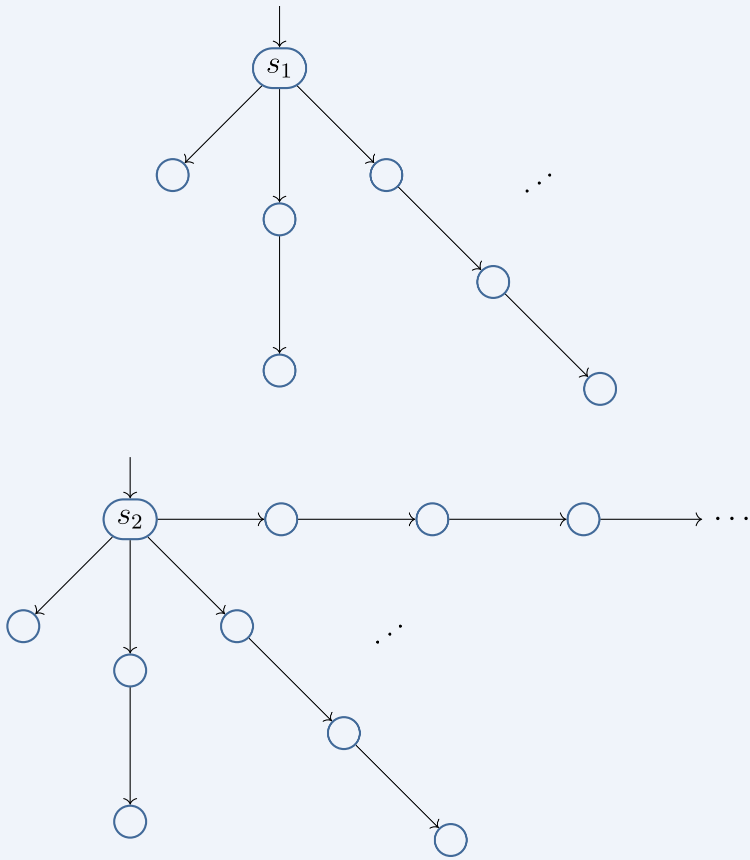
□

4 Propriété de Hennessy-Milner.

Remarque 2 (Question). Est-ce que $s_1 \equiv s_2$ implique $s_1 \sim s_2$? Autrement dit, est-ce que $\equiv$ est une bisimulation ?

La réponse est ***non*** en général.

Exemple 2. Considérons les système de transitions suivants.



On remarque que $s_1 \not\sim s_2$ mais $s_1 \equiv s_2$ (la logique HML ne peut « voir » qu'à une profondeur finie).

Définition 7. Une classe $\mathfrak{M}$ de modèles a la ***propriété de Hennessy-Milner*** si, dans $\mathfrak{M}$, l'équivalence $\equiv$ entre états est une bisimulation.

Définition 8. Soit $K = (S, \mathrm{Act}, \to)$ alors, pour $\alpha \in \mathrm{Act}$ et $s \in S$, on note

$$\mathrm{Succ}^\alpha(s) := \{s' \in S \mid s \xrightarrow{\alpha} s'\}.$$

Définition 9. Un modèle de Kripke M est dit ***à image finie*** si, pour tout $s \in S$ et $\alpha \in \mathrm{Act}$, l'ensemble $\mathrm{Succ}^\alpha(s)$ des successeurs de s par une action α fixée est finie.

Proposition 1 (Hennessy-Milner). La classe des modèles à image finie a la propriété de Hennessy-Milner.

5 Saturation modale.

Définition 10. Soit $M = (S, \mathrm{Act}, \to, \mathrm{AP}, L)$.

1. Soient $T \subseteq S$ et $\Phi \subseteq \mathsf{HML}$. On dit que Φ est *satisfiable* dans T s'il existe $s \in T$ tel que pour tout $\phi \in \Phi$, on a $s \Vdash \phi$.
2. Soient $T \subseteq S$ et $\Phi \subseteq \mathsf{HML}$. On dit que Φ est *finiement satisfiable* dans T si, tout $\Psi \subseteq_{\mathrm{fin}} \Phi$ est satisfiable dans T, autrement dit
$$\forall \Psi \subseteq_{\mathrm{fin}} \Phi \quad \exists s \in T \quad s \Vdash \bigwedge \Psi.$$
3. On dit que M est *modalement saturée* si, pour tout $s \in S$, tout $\alpha \in \mathrm{Act}$ et tout $\Phi \subseteq \mathsf{HML}$ tel que Φ est finiement satisfiable dans $\mathrm{Succ}^\alpha(s)$ alors Φ est satisfiable dans $\mathrm{Succ}^\alpha(s)$, autrement dit
$$\forall s \in S, \forall \alpha \in \mathrm{Act}, \forall \Phi \subseteq \mathsf{HML},$$
$$\left(\begin{array}{c} \forall \Psi \subseteq_{\mathrm{fin}} \Phi \quad \exists s' \xleftarrow{\alpha} s \quad s' \Vdash \bigwedge \Psi \\ \Downarrow \\ \exists s' \xleftarrow{\alpha} s \quad \forall \phi \in \Phi \quad s' \Vdash \phi \end{array}\right).$$

Proposition 2. Si M_1 et M_2 sont modalement saturés alors $\equiv$ entre S_1 et S_2 est une bisimulation.

Preuve. Soient $s_1 \equiv s_2$.

1. On a bien $L_1(s_1) = L_2(s_2)$.
2. Supposons $s_1 \xrightarrow{\alpha} s_1'$. On pose $\Phi = \{\phi \mid s_1' \Vdash \phi\}$. Soit $\Psi \subseteq_{\text{fin}} \Phi$ quelconque. On a $s_1 \Vdash \langle\alpha\rangle \bigwedge \Psi$ donc $s_2 \Vdash \langle\alpha\rangle \bigwedge \Psi$. Il existe donc $s_2' \xleftarrow{\alpha} s_2$ telle que $s_2' \Vdash \bigwedge \Psi$. Par ***saturation modale*** (de M_2), il existe $s_2' \xleftarrow{\alpha} s_2$ tel que, pour tout $\phi \in \Phi$, $s_2' \Vdash \phi$. Autrement dit, on a bien :
$$\begin{tikzcd} s_1 \arrow[r, dash, "\equiv"] \arrow[d, "\alpha"] & s_2 \arrow[d, dashed, "\alpha"] \\ s_1' \arrow[r, dash, dashed, "\equiv"] & s_2' \end{tikzcd}.$$
3. Symétriquement.

□

Proposition 3. Si M est à image finie alors M est modalement saturé.

Preuve. Soit $s \in S$, $\alpha \in \mathrm{Act}$, et $\Phi \subseteq \mathsf{HML}$. Supposons que Φ finiement saturé dans $\mathrm{Succ}^\alpha(s)$. Par l'absurde, supposons

$$\forall t \xrightarrow{\alpha} s \quad \exists \phi_t \in \Phi \quad t \nVdash \phi_t.$$

On pose
$$\Psi := \{\phi_t \mid t \in \mathrm{Succ}^\alpha(s)\} \subseteq_{\text{fin}} \Phi.$$
Il existe donc $t \xleftarrow{\alpha} s$ tel que $t \Vdash \bigwedge \Psi$, donc $t \Vdash \phi_t$. ***Absurde.*** □

6 Algèbres de Boole avec opérateurs.

Soit $\mathfrak{L}(\mathsf{HML}) = \{[\phi]_\equiv \mid \phi \in \mathsf{HML}\}$. On notera dans la suite ϕ pour $[\phi]_\equiv$. Comme pour le *Homework*, on a que $(\mathfrak{L}(\mathsf{HML}), \leq)$ est une algèbre de Boole où $\phi \leq \psi$ ssi $\phi \wedge \psi \equiv \phi$.

Pour un modèle de Kripke M, on a que $(\wp(M), \subseteq)$ est une algèbre de Boole et

$$\begin{aligned} [\![-]\!] : \mathfrak{L}(\mathsf{HML}) &\longrightarrow \wp(S) \\ [\phi]_\equiv &\longmapsto [\![\phi]\!] \end{aligned}$$

est un morphisme d'algèbres de Boole.

Lemme 2. Soit M un modèle de Kripke. On a que

$$\begin{aligned} [\![\langle\alpha\rangle]\!] : \wp(S) &\longrightarrow \wp(S) \\ A &\longmapsto \{s \mid \exists s' \xleftarrow{\alpha} s \quad s' \in A\} \end{aligned}$$

est un morphisme de $\vee$-semi-treillis, et on a $[\![\langle\alpha\rangle\phi]\!] = [\![\langle\alpha\rangle]\!]([\![\phi]\!])$.

De même, on a que

$$\begin{aligned} [\![[\alpha]]\!] : \wp(S) &\longrightarrow \wp(S) \\ A &\longmapsto \{s \mid \forall s' \xleftarrow{\alpha} s \quad s' \in A\} \end{aligned}$$

est un morphisme de $\wedge$-semi-treillis, et on a $[\![[\alpha]\phi]\!] = [\![[\alpha]]\!]([\![\phi]\!])$. $\square$

Lemme 3. On a que

$$\begin{aligned} \langle\alpha\rangle : \mathfrak{L}(\mathsf{HML}) &\longrightarrow \mathfrak{L}(\mathsf{HML}) \\ [\phi]_\equiv &\longmapsto [\langle\alpha\rangle\phi]_\equiv \end{aligned}$$

est un morphisme de $\vee$-semi-treillis et

$$\begin{aligned} [\alpha] : \mathfrak{L}(\mathsf{HML}) &\longrightarrow \mathfrak{L}(\mathsf{HML}) \\ [\phi]_\equiv &\longmapsto [[\alpha]\phi]_\equiv \end{aligned}$$

est un morphisme de $\wedge$-semi-treillis

On a $[\![[\alpha]]\!] = [\![\langle\alpha\rangle]\!]^\partial$ et $[\alpha] = \langle\alpha\rangle^\partial$ avec la notation définie ci-après.

Définition 11. Pour $f : B \to B'$ où B, B' sont deux algèbres de Boole, on note

$$\begin{aligned} f^\partial : B &\longrightarrow B' \\ a &\longmapsto \neg' f(\neg a). \end{aligned}$$

C'est le dual par De Morgan de f.

Lemme 4. Pour $f : B \to B'$ où B, B' sont deux algèbres de Boole,

1. on a $(f^\partial)^\partial = f$;
2. si f est un morphisme de $\vee$-semi-treillis alors f^∂ est un morphisme de $\wedge$-semi-treillis ;
3. si f est un morphisme de $\wedge$-semi-treillis alors f^∂ est un morphisme de $\vee$-semi-treillis ;
4. si f est un morphisme de treillis alors $f^\partial = f$.

Remarque 3. Dans LML, on a une modalité $\bigcirc$ qui est auto duale car morphisme de treillis.

Définition 12 (BAO). Une *algèbre de Boole avec opérateurs* (BAO) est de la forme

$$(B, \leq, (f_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{Act}})$$

où $(B, \leq)$ est une algèbre de Boole et $f_\alpha : B \to B$ est un morphisme de $\vee$-semi-treillis pour tout $\alpha \in \mathrm{Act}$.

Exemple 3. On a que $\mathfrak{L}(\mathsf{HML})^+ := (\mathfrak{L}(\mathsf{HML}), \leq, (\langle \alpha \rangle)_{\alpha \in \mathrm{Act}})$ est une algèbre de Boole avec opérateurs.

Exemple 4. Pour $L = (S, \mathrm{Act}, \to)$ une structure de Kripke, alors

$$K^+ := \big(\wp(S), \subseteq, (\llbracket \langle \alpha \rangle \rrbracket)_{\alpha \in \mathrm{Act}}\big)$$

est une algèbre de Boole avec opérateurs.

7 Structures ultrafiltres.

Définition 13. Soit $(B, \leq, (f_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{Act}})$ une algèbre de Boole avec opérateurs. On définit

$$\mathfrak{Uf}(B) := (\mathbf{Sp}(B), \mathrm{Act}, \to),$$

où $\mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{H}$ ssi pour tout $b \in B$, $b \in \mathscr{H}$ implique $f_\alpha(b) \in \mathscr{F}$.

Lemme 5. On a $\mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{H}$ ssi pour tout $b \in B$, $f_\alpha^\partial(b) \in \mathscr{F}$ implique $b \in \mathscr{H}$.

Preuve. (Idée) Supposons $\mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{H}$. Soit $b \in B$. Par contraposée, supposons $b \notin \mathscr{H}$. On a donc $\neg b \in \mathscr{H}$ et donc $f_\alpha(\neg b) \in \mathscr{F}$. Mais, $f_\alpha(\neg b) = \neg f_\alpha^\partial(b)$ et donc $f_\alpha^\partial(b) \notin \mathscr{F}$.

Réciproquement, supposons $\mathscr{F} \not\xrightarrow{\alpha} \mathscr{H}$. Il existe donc $b \in B$ tel que $b \in \mathscr{H}$ et $f_\alpha(b) \notin \mathscr{F}$. Donc $\neg f_\alpha(b) = f_\alpha^\partial(\neg b) \in \mathscr{F}$ et $\neg b \notin \mathscr{H}$. $\square$

7.1 Extensions d'ultrafiltres aux modèles de Kripke.

Soit $M = (S, \mathrm{Act}, \to, \mathrm{AP}, L)$.

Remarque 4. Soit X un ensemble.

- Un *filtre* (*propre*) sur X est un filtre (propre) sur $(\wp(X), \subseteq)$.
- Un *ultrafiltre* sur X est un ultrafiltre sur $(\wp(X), \subseteq)$.
- Si $G \subseteq \wp(X)$ qui a la propriété des intersections finies (*finite*

intersection property) alors

$$\bigcap \{\, E \mid E \text{ filtre propre et } E \supseteq G \,\}$$

est un filtre propre.

- Si $G \subseteq \wp(X)$ a la propriété des intersections finies alors il existe un ultrafiltre $\mathscr{F}$ sur X tel que $G \subseteq \mathscr{F}$.
- Pour tout $x \in X$, on définit

$$\pi(x) := \{A \in \wp(X) \mid x \in A\}$$

est l'*ultrafiltre principal* induit par x. On a que

$$\pi : X \to \mathfrak{Uf}(X) =: \mathbf{Sp}(\wp(X), \subseteq).$$

Remarque 5. La fonction de *labelling* $L : S \to \mathbf{2}^{\mathrm{AP}}$ peut être décrite par $V : \mathrm{AP} \to \mathbf{2}^S$.

Définition 14. Soit $M = (S, \mathrm{Act}, \to, \mathrm{AP}, L)$ un modèle de Kripke. L'*extension ultrafiltre* de M est

$$\mathfrak{Uf}(M) = (\underbrace{\mathfrak{Uf}(S), \mathrm{Act}, \to}_{(S, \mathrm{Act}, \to)^+}, \mathrm{AP}, L'),$$

où $L' : \mathfrak{Uf}(S) \to \mathbf{2}^{\mathrm{AP}}$ est générée par

$$\begin{aligned} V' : \mathrm{AP} &\longrightarrow \mathbf{2}^{\mathfrak{Uf}(S)} \\ \mathsf{a} &\longmapsto \{\mathscr{F} \mid V(\mathsf{a}) \in \mathscr{F}\}. \end{aligned}$$

Remarque 6. Dans $\mathfrak{Uf}(M)$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{H}$

- pour tout $A \in \wp(S)$, $A \in \mathscr{H}$ implique $[\![\langle\alpha\rangle]\!](A) \in \mathscr{F}$;
- pour tout $A \in \wp(S)$, $[\![[\alpha]]\!](A) \in \mathscr{F}$ implique $A \in \mathscr{H}$.

Remarque 7. Si M est ***fini*** alors

- $\pi : S \to \mathfrak{Uf}(S)$ est une bijection ;
- $\pi(s) \xrightarrow{\alpha} \pi(t)$ ssi $s \xrightarrow{\alpha} t$;
- $L'(\pi(s)) = L(s)$.

Proposition 4. Pour tout $\mathscr{F} \in \mathfrak{Uf}(S)$, et tout ϕ une formule HML, on a

$$\underbrace{[\![\phi]\!] \in \mathscr{F}}_{\text{dans } M} \iff \underbrace{\mathscr{F} \Vdash \phi}_{\text{dans } \mathfrak{Uf}(M)}.$$

Preuve. On procède par induction sur ϕ.

Cas $\mathsf{a} \in \mathrm{AP}$. Par définition de $\mathfrak{Uf}(M)$, on a $\mathscr{F} \Vdash \mathsf{a}$ ssi $[\![\mathsf{a}]\!] \in \mathscr{F}$.

Cas $- \vee -$, $- \wedge -$, $\neg -$, $\top$, $\bot$. Vu dans le *Homework*, partie II.

Cas $\langle\alpha\rangle -$. On montre que $\mathscr{F} \Vdash \langle\alpha\rangle\phi \iff [\![\langle\alpha\rangle]\!]([\![\phi]\!]) \in \mathscr{F}$.

- « $\implies$ ». Si $\mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{H}$ tel que $\mathscr{H} \Vdash \phi$ alors, par hypothèse d'induction $[\![\phi]\!] \in \mathscr{H}$ et donc $[\![\langle\alpha\rangle]\!]([\![\phi]\!]) \in \mathscr{F}$.
- « $\impliedby$ ». Supposons $[\![\langle\alpha\rangle]\!]([\![\phi]\!]) \in \mathscr{F}$. On va montrer qu'il existe $\mathscr{H}$ tel que $\mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{H}$ et $[\![\phi]\!] \in \mathscr{H}$. On va utiliser le lemme de l'ultrafiltre. Soit

$$H := \left\{ A \cap [\![\phi]\!] \;\middle|\; \begin{array}{c} A \in \wp(S) \\ \text{et} \\ [\![[\alpha]]\!](A) \in \mathscr{F} \end{array} \right\}.$$

1. Remarquons que H est stable par intersections binaires : si $A_1 \cap [\![\phi]\!], A_2 \cap [\![\phi]\!] \in H$ alors $(A_1 \cap$

$A_2) \cap [\![\phi]\!] \in H$ car $[\![[\alpha]]\!](A_1), [\![[\alpha]]\!](A_2) \in \mathscr{F}$ et donc

$$[\![[\alpha]]\!](A_1 \cap A_2) = [\![[\alpha]]\!](A_1) \cap [\![[\alpha]]\!](A_2) \in \mathscr{F}.$$

2. De plus, on a que $\emptyset \notin H$. En effet, soit $A \cap [\![\phi]\!] \in H$ alors
$$[\![\langle\alpha\rangle\phi]\!] \cap [\![[\alpha]]\!](A) \neq \emptyset$$
(intersection de deux éléments de $\mathscr{F}$), il existe donc $s \in S$ tel que $s \Vdash \langle\alpha\rangle\phi$ et pour tout $s' \xleftarrow{\alpha} s$, on a $s' \in A$. Donc $A \neq \emptyset$ (car il existe $s' \xleftarrow{\alpha} s$).

3. On a $S \cap [\![\phi]\!] \in H$ car $[\![[\alpha]]\!](S) = S \in \mathscr{F}$.

Donc H a la propriété des intersections finies, et par le lemme de l'ultrafiltre, il existe $\mathscr{H} \in \mathfrak{Uf}(S)$ tel que $\mathscr{H} \supseteq H$. De plus, on a $\mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{H}$ car, pour tout $A \in \wp(S)$, $[\![[\alpha]]\!](A) \in \mathscr{F}$ implique $A \cap [\![\phi]\!] \in H$ qui implique $A \in \mathscr{H}$. On a aussi $[\![\phi]\!] \in \mathscr{H}$ car $S \cap [\![\phi]\!] \in \mathscr{H}$. Ainsi, par hypothèse d'induction, on a $\mathscr{H} \Vdash \phi$ et donc $\mathscr{F} \Vdash \langle\alpha\rangle\phi$.

Cas $[\alpha]-$**.** Par dualité.

□

Corollaire 1. Soit ϕ une formule HML. Pour tout $s \in S$, on a

$$s \Vdash \phi \iff s \in [\![\phi]\!] \iff [\![\phi]\!] \in \pi(s).$$

De plus,

$$M \models \phi \iff [\![\phi]\!] = S \iff \mathfrak{Uf}(M) \models \phi.$$

Proposition 5. L'extension ultrafiltre $\mathfrak{Uf}(M)$ de M est modalement saturée. En particulier, étant donnés M_1 et M_2 deux modèles de Kripke, on a

$$s_1 \equiv s_2 \iff \pi(s_1) \equiv \pi(s_2) \iff \pi(s_1) \sim_{\mathfrak{Uf}(M)} \pi(s_2).$$