Chapitre 1

Calcul

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Sommes

Remarque (Notation):
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Pour $p \leqslant q \in \mathbb{N}$, on note

$$\sum_{k=p}^{q} u_k$$

le nombre $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q$.

Par convention,

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = 0 \qquad \text{si } q < p.$$

Proposition: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}$$

■

Proposition: Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, $(p,q,r,s) \in \mathbb{N}^4$ et $\varphi : [\![p,q]\!] \to [\![r,s]\!]$ une bijection (i.e. $\forall y \in [\![r,s]\!], \exists! x \in [\![p,q]\!], \varphi(x) = y$).

Alors,

$$\sum_{k=r}^{s} u_k = \sum_{k=p}^{q} u_{\varphi(k)}.$$

■

Proposition (téléscopage)**:** Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

$$\forall p \leqslant q \in \mathbb{N}, \sum_{k=p}^{q} (u_{k+1} - u_k) = u_{q+1} - u_p.$$

■

Remarque (Analogie avec le calcul intégral):

$$\int_a^b f'(x)\ \mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

Proposition: Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=0}^{q} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{sinon.} \end{cases}$$

■

Deuxième partie

Formules à connaître

Définition: Soient $k, n \in \mathbb{N}$. On définit "k parmi n" par

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & \text{si } k \leqslant n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition: Avec les notations précédentes,

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$

■

Proposition (binôme de Newton)**:** Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

sauf si $\begin{cases} a+b=0, \\ n=0. \end{cases}$

Remarque (triangle de Pascal):

$n=0$							1						
$n=1$						1		1					
$n=2$					1		2		1				
$n=3$				1		3		3		1			
$n=4$			1		4		6		4		1		
$n=5$		1		5		10		10		5		1	
$n=6$	1		6		15		20		15		6		1

■

Proposition: Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

■

Troisième partie

Sommes doubles

Quatrième partie

Sommes sur un ensemble fini

Définition: Soit I un ensemble fini. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes. On note $\sum_{i\in I} a_i$ la somme des éléments de cette famille.

Proposition: Soit $\varphi : I \to J$ une bijection et $(a_j)_{j\in J}$ une famille de nombres complexes. Alors

$$\sum_{j\in J} a_j = \sum_{i\in I} a_{\varphi(i)}.$$

$\square$

Cinquième partie

Produits

Définition: Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes.
On note $\prod_{i\in I} a_i$ le produit de ces éléments.

Proposition: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suit de nombres complexes non nuls. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_0}.$$

□

Remarque (⚠ Attention):

$$\prod_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda^{\#I} \times \prod_{i\in I} a_i$$

où $\#I$ est le nombre d'éléments de I.

Sixième partie

Rappels sur $\ln$ et $\exp$

Proposition:

- Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille finie de réels strictement positifs. Alors,
$$\ln\left(\prod_{i\in I} a_i\right) = \sum_{i\in I} \ln a_i.$$
- Soit $(b_i)_{i\in I}$ une famille de réels. Alors
$$\exp\left(\sum_{i\in I} b_i\right) = \prod_{i\in I} \exp(b_i).$$

Remarque:
Soit $f : I \to \mathbb{R}^*$ dérivable. On pose $g : x \mapsto \ln|f(x)|$.

Alors g est dérivable sur I et
$$\forall x \in I, g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

On dit que $\dfrac{f'}{f}$ est la <u>dérivée logarithmique</u> de f.

Soient $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}^*$ dérivables. Alors
$$\frac{(f_1\, f_2)'}{f_1\, f_2} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2}.$$

Remarque:
Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $a^n = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{ fois}}$.
- Soit $n \in \mathbb{Z}_*^-$. Si $a \neq 0$, alors $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$.
- Si $a \neq 0$, $a^0 = 1$ et
$$\forall p, q \in \mathbb{Z}, a^p \times a^q = a^{p+q}.$$
- Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $a > 0$.
$$a^p = \exp(\ln a^p) = \exp(p \ln a) = e^{p \ln a}.$$

Définition: Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$ et $p \in \mathbb{R}$. On pose $a^p = e^{p \ln a}$.