Chapitre 1

Calcul

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Sommes

Remarque (Notation):
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Pour $p \leqslant q \in \mathbb{N}$, on note

$$\sum_{k=p}^{q} u_k$$

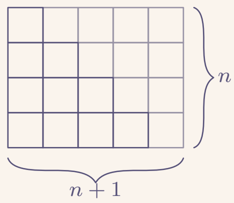
le nombre $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q$.

Par convention,

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = 0 \qquad \text{si } q < p.$$

Exemple:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$



Proposition: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}$$

Preuve:
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_{n-k} &= u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_0 \\
&= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\
&= \sum_{k=0}^{n} u_k
\end{aligned}$$

□

Proposition: Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, $(p, q, r, s) \in \mathbb{N}^4$ et $\varphi : [\![p, q]\!] \to [\![r, s]\!]$ une bijection (i.e. $\forall y \in [\![r, s]\!], \exists! x \in [\![p, q]\!], \varphi(x) = y$).

Alors,

$$\sum_{k=r}^{s} u_k = \sum_{k=p}^{q} u_{\varphi(k)}.$$

Preuve:

$$\sum_{k=p}^{q} u_{\varphi(k)} = u_{\varphi(p)} + u_{\varphi(p+1)} + \cdots + u_{\varphi(q)}$$

$$\sum_{k=r}^{s} u_k = u_r + u_{r+1} + \cdots + u_s$$

Comme φ est bijective, chaque terme u_k avec $k \in [\![r, s]\!]$ apparaît une fois et une seule fois dans la somme

$$u_{\varphi(p)} + u_{\varphi(p+1)} + \cdots + u_{\varphi(q)}.$$

Ainsi, les deux sommes sont identiques. □

Exemple:
On pose

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k = \frac{1}{k-4}.$$

On pose également $\varphi : [\![1, 5]\!] \to [\![-1, 3]\!]$: une bijection.

Alors,

$$\sum_{k=-1}^{3} \frac{1}{k-4} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{5} u_{\varphi(k)} &= \frac{1}{\varphi(1)-4} + \frac{1}{\varphi(2)-4} + \frac{1}{\varphi(3)-4} + \frac{1}{\varphi(4)-4} + \frac{1}{\varphi(5)-4} \\ &= -\frac{1}{5} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1. \end{aligned}$$

Exemple:
Soit φ la bijection définie par

$$\begin{aligned} \varphi : [\![1, 5]\!] &\longrightarrow [\![1, 5]\!] \\ k &\longmapsto \begin{cases} 2 & \text{si } k = 1 \\ 3 & \text{si } k = 2 \\ 1 & \text{si } k = 3 \\ 4 & \text{si } k = 4 \\ 5 & \text{si } k = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{5} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$$

$$\sum_{k=1}^{5} u_{\varphi(k)} = u_2 + u_3 + u_1 + u_4 + u_5$$

Proposition (téléscopage)**:** Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

$$\forall p \leqslant q \in \mathbb{N}, \sum_{k=p}^{q} (u_{k+1} - u_k) = u_{q+1} - u_p.$$

Preuve: <u>Méthode 1</u> Soient $p \leqslant q$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q}(u_{k+1}-u_k) &= \cancel{u_{p+1}} - u_p + \cancel{u_{p+2}} - \cancel{u_{p+1}} \cdots + u_{q+1} - \cancel{u_q} \\ &= u_{q+1} - u_p\end{aligned}$$

<u>Méthode 2</u> Soient $p \leqslant q$.

$$\sum_{k=p}^{q}(u_{k+1}-u_k) = \sum_{k=p}^{q} u_{k+1} - \sum_{k=p}^{q} u_k$$

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} [\![p,q]\!] & \longrightarrow & [\![p+1,q+1]\!] \\ k & \longmapsto & k+1 \end{array}$. φ est bijective donc

$$\sum_{k=p}^{q} u_{k+1} = \sum_{k=p}^{q} u_{\varphi(k)} = \sum_{k=p+1}^{q+1} u_k.$$

D'où,

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q}(u_{k+1}-u_k) &= \sum_{k=p+1}^{q+1} u_k - \sum_{k=p}^{q} u_k \\ &= \left(u_{q+1} + \sum_{k=p+1}^{q} u_k\right) - \left(u_p + \sum_{k=p+1}^{q} u_k\right) \\ &= u_{q+1} - u_p\end{aligned}$$

□

Remarque (Analogie avec le calcul intégral):

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

Exemple:
Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![1,n]\!],\ \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{(1+k)-k}{k(k+1)} \\ &= \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} \\ &= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\end{aligned}$$

et, par téléscopage, on obtient donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\ &= \frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\\ &= 1-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Par contre, on n'a pas de formule simple pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ (mais on sait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{\pi^2}{6}$).

Exemple (à connaître):
Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.
On cherche $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall k\in\mathbb{N}^*, u_{k+1}-u_k=k^2.$$

On cherche donc (u_k) sous la forme

$$\forall k\in N^*, u_k=ak^3+bk^2+ck+d$$

avec $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$.
Soit $k\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}u_{k+1}-u_k &= a(k+1)^3+b(k+1)^2+c(k+1)+\cancel{d}-ak^3-bk^2+ck+\cancel{d}\\ &= a(\cancel{k^3}+3k^2+3k+1)+b(\cancel{k^2}+2k+1)+c(\cancel{k}+1)-\cancel{ak^3}-\cancel{bk^2}-\cancel{ck}\\ &= k^2\times a+k(3a+2b)+(a+b+c)\end{aligned}$$

On résout le système

$$(S):\quad\begin{cases}3a=1,\\ 3a+2b=0,\\ a+b+c.\end{cases}\qquad\iff\qquad\begin{cases}a=\frac{1}{3},\\ b=-\frac{1}{2},\\ c=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.\end{cases}$$

On vient de montrer que,

$$\forall k\in N^*, k^2=u_{k+1}-u_k\qquad\text{avec } u_k=\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{6}k.$$

Donc, par téléscopage,

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n}k^2 &= u_{n+1}-u_1\\ &= \frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{6}(n+1)-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{6}}\\ &= \frac{n+1}{6}\big(2(n+1)^2-3(n+1)+1\big)\\ &= \frac{n+1}{6}(2n^2+4n+2-3n-3+1)\\ &= \frac{n(n-1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

Proposition: Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=0}^{q} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve:
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1.

$$\begin{aligned}(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k - q\sum_{k=0}^{n} q^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (q^k - q^{k+1}) \\ &= 1 - q^{n+1}\end{aligned}$$

Si $q \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Si $q = 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1.$$

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$.

On a, d'une part :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} q^k = S_n + q^{n+1}$$

et d'autre part

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 + qS_n.$$

Et donc,

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, 1 + qS_n = S_n + q^{n+1} &\iff 1 + (q-1)S_n = q^{n+1} \\ &\iff S_n(q-1) = q^{n+1} - 1 \\ &\iff S_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \text{ pour } q \neq 1.\end{aligned}$$

□

Deuxième partie

Formules à connaître

Définition: Soient $k, n \in \mathbb{N}$. On définit "k parmi n" par

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\ (n-k)!} & \text{si } k \leqslant n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition: Avec les notations précédentes,

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$

Preuve: 1. $\binom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\big(n-(n-k)\big)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!\ k!} = \binom{n}{k}$

2.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{n!(k+1)}{k!(n-k)!(k+1)} \\ &= \frac{n!(n-\cancel{k}+\cancel{k}+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

□

Proposition (binôme de Newton)**:** Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

sauf si $\begin{cases} a+b=0, \\ n=0. \end{cases}$

Remarque (triangle de Pascal):

$n=0$							1							
$n=1$						1		1						
$n=2$					1		2		1					
$n=3$				1		3		3		1				
$n=4$			1		4		6		4		1			
$n=5$		1		5		10		10		5		1		
$n=6$	1		6		15		20		15		6		1	

Exemple:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Preuve:
Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P(n) : \text{“}(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\text{”}$$

avec la convention $\forall z \in \mathbb{C}, z^0 = 1$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $P(n)$ vraie. Montrons $P(n+1)$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} [\![0,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,n+1]\!] \\ k & \longmapsto & k+1 \end{array}$ bijective.
Donc,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} u_k \text{ où } \forall n \in [\![1,n+1]\!], u_k = \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k + b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n+1-k} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} b + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} \\
&+ \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

— Montrons $P(0)$ $(a+b)^0 = 1$.

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 \times 1 \times 1$$

Donc,

$$(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k}$$

$\square$

Exemple:

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$. On applique la formule du binôme de Newton avec $a = -1$ et $b = 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1+1)^n = \begin{cases} 0 \text{ si } n > 0, \\ 1 \text{ si } n = 0. \end{cases}$$

Proposition: Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Preuve:

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \big(\underbrace{a^{k+1} b^{n-(k+1)}}_{u_{k+1}} - \underbrace{a^k b^{n-k}}_{u_k}\big) \\ &= u_n - u_0 \\ &= a^n - b^n\end{aligned}$$

$\square$

Troisième partie

Sommes doubles

Exemple:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}a_{i,j}$$

$$\begin{aligned}S&=\sum_{j=1}^{1}a_{1,j}+\sum_{j=1}^{2}a_{2,j}+\sum_{j=3}^{3}a_{3,j}+\cdots+\sum_{j=1}^{n}a_{n,j}\\&=a_{11}\\&+a_{21}+a_{22}\\&+a_{31}+a_{32}+a_{33}\\&\vdots\\&+a_{n,1}+\cdots+a_{n,n}\end{aligned}$$

Exemple:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}&=\sum_{i=1}^{n}(2^i-1)\\&=\sum_{i=1}^{n}2^i-n\\&=2\times\frac{1-2^n}{1-2}-n\\&=2(2^n-1)-n\end{aligned}$$

Exemple:
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$S=\sum_{j=1}^{i}\sum_{i=1}^{n}\binom{i}{j}\Bigg]\text{Aucun sens !}$$

Exemple:
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{i}{j}$$

On pose

$$a_{j,i}=\binom{i}{j}.$$

Alors,

$$\begin{array}{ccccccccc}S&=&a_{11}&+&a_{12}&+&\cdots&+&a_{1n}\\&&&+&a_{22}&+&\cdots&+&a_{2n}\\&&&&&&\ddots&\vdots&\vdots\\&&&&&&&+&a_{nn}\end{array}$$

$$\sum_{j=1}^{i}a_{j,i}\quad\begin{aligned}&=\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}\\&=2^i-1\end{aligned}\qquad\boxed{\cdot}\quad\begin{aligned}&=\sum_{j=1}^{n}a_{j,n}=\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\\&=2^n-1\end{aligned}$$

Donc,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}=2(2^n-1)-n.$$

Quatrième partie

Sommes sur un ensemble fini

Définition: Soit I un ensemble fini. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes. On note $\sum_{i\in I} a_i$ la somme des éléments de cette famille.

Exemple:
Soit $I = \{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit\}$. On pose

$$\begin{cases} a_\heartsuit = 0 \\ a_\clubsuit = -1 \\ a_\spadesuit = i \\ a_\diamondsuit = 1 + i. \end{cases}$$

Alors

$$\sum_{j\in I} a_j = 0 - 1 + i + 1 + i = 2i.$$

Exemple:
Avec $I = \{x \mapsto x^2, x \mapsto x^3, x \mapsto x^4\}$, on pose $\forall i \in I, a_i = i(2)$.

Alors,

$$\sum_{i\in I} a_i = 2^2 + 2^3 + 2^4.$$

Exemple:

— $\displaystyle\sum_{k\in[\![1,n]\!]} 2^k = \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2(2^n - 1)$.
— $\displaystyle\sum_{\substack{k\in[\![1,n]\!] \\ k \text{ pair}}} 2^k = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant \frac{n}{2} \\ j \text{ entier}}} 2^{2j}$.

Proposition: Soit $\varphi : I \to J$ une bijection et $(a_j)_{j\in J}$ une famille de nombres complexes. Alors

$$\sum_{j\in J} a_j = \sum_{i\in I} a_{\varphi(i)}.$$

□

Exemple:

$$\sum_{i\in\{2,4,6,8\}} a_i = \sum_{j=1}^{4} a_{2j}.$$

Exemple:

$$\begin{aligned} S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} &= \sum_{(i,j)\in\left\{(1,1),\dots,(1,n),(2,2),\dots,(2,n),\dots,(n,n)\right\}} a_{i,j} \\ &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}. \end{aligned}$$

Cinquième partie

Produits

Définition: Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes.

On note $\prod_{i\in I} a_i$ le produit de ces éléments.

Proposition: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suit de nombres complexes <u>non nuls</u>. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_0}.$$

□

Remarque (⚠ Attention):

$$\prod_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda^{\#I} \times \prod_{i\in I} a_i$$

où $\#I$ est le nombre d'éléments de I.

Sixième partie

Rappels sur $\ln$ et $\exp$

Proposition:

- Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille finie de réels strictement positifs. Alors,
$$\ln\left(\prod_{i\in I} a_i\right) = \sum_{i\in I} \ln a_i.$$
- Soit $(b_i)_{i\in I}$ une famille de réels. Alors
$$\exp\left(\sum_{i\in I} b_i\right) = \prod_{i\in I} \exp(b_i).$$

Remarque:
Soit $f : I \to \mathbb{R}^*$ dérivable. On pose $g : x \mapsto \ln|f(x)|$.

Alors g est dérivable sur I et
$$\forall x \in I, g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

On dit que $\frac{f'}{f}$ est la dérivée logarithmique de f.

Soient $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}^*$ dérivables. Alors
$$\frac{(f_1\, f_2)'}{f_1\, f_2} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2}.$$

Remarque:
Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $a^n = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{ fois}}$.
- Soit $n \in \mathbb{Z}_*^-$. Si $a \neq 0$, alors $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$.
- Si $a \neq 0$, $a^0 = 1$ et
$$\forall p, q \in \mathbb{Z}, a^p \times a^q = a^{p+q}.$$
- Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $a > 0$.
$$a^p = \exp(\ln a^p) = \exp(p \ln a) = e^{p \ln a}.$$

Définition: Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$ et $p \in \mathbb{R}$. On pose $a^p = e^{p \ln a}$.