Chapitre 02

Nombre

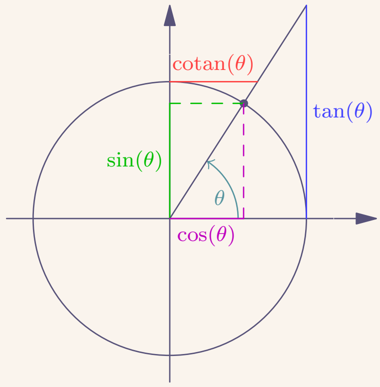
Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Trigonométrie



Définition: On définit, pour

$$\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$$
$$\iff \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

la <u>tangente</u> de θ par

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Définition: Pour $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-k\pi, (k+1)\pi[$, on définit la <u>contangente</u> de θ par

$$\operatorname{cotan}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Proposition: Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. $\cos(-a) = \cos(a)$
2. $\cos(a+2\pi) = \cos(a)$
3. $\cos(a+\pi) = -\cos(a)$
4. $\cos(\pi-a) = -\cos(a)$
5. $\sin(-a) = -\sin(a)$
6. $\sin(a+2\pi) = \sin(a)$
7. $\sin(a+\pi) = -\sin(a)$
8. $\sin(\pi-a) = \sin(a)$
9. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
10. $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$
11. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \sin(a)$

12. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos(a)$

■

Proposition: Soient a et b deux réels tels que $a \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

1. $\tan(a+\pi)=\tan(a)$
2. $\tan(-a)=-\tan(a)$
3. Si $a+b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors, $\tan(a+b)=\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

■

Proposition: Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Si $a \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors, $1+\tan^2(a)=\dfrac{1}{\cos^2(a)}$
2. Si $a \not\equiv \pi\ [2\pi]$
   — $\cos(a)=\dfrac{1-\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{a}{2}\right)}$
   — $\sin(a)=\dfrac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$
   — Si $a \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, $\tan(a)=\dfrac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$

■

Deuxième partie

Nombres complexes de module 1

Proposition: Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

$$(\cos(a)+i\sin(a))\times(\cos(b)+i\sin(b))=\cos(a+b)+i\sin(a+b)$$

■

Définition: Pour $a\in\mathbb{R}$, on pose $e^{ia}=\cos(a)+i\sin(a)$
Ainsi, $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2, e^{ia}\times e^{ib}=e^{i(a+b)}$

Proposition: Soient a,b,c trois nombres complexes avec $a\neq 0$ et z_1,z_2 les racines de $P: z\mapsto az^2+bz+c$
Alors, $z_1\times z_2=\dfrac{c}{a}$ et $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}$

■

Proposition: Soient $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ et z_1,z_2,z_3 les solutions de

$$z^3+az^2+bz+c=0$$

Alors,

$$\begin{cases} z_1z_2z_3=-c \\ z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3=b \\ z_1+z_2+z_3=-a \end{cases}$$

□

Proposition: Soient $a_1,a_2,\dots,a_n$ des nombres complexes et $z_1,z_2,\dots,z_n$ les solutions de

$$z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_0=1$$

Alors,

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\quad \sum_{1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\dots\leqslant i_k\leqslant n} z_{i_1}\times z_{i_2}\times\dots\times z_{i_k}=(-1)^k a_{n-k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} z_k=-a_{n-1}$$

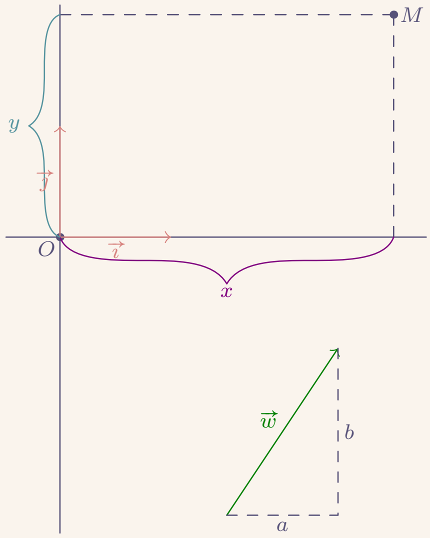
$$\prod_{k=1}^{n} z_k=(-1)^k a_0$$

■

Troisième partie

Géométrie des nombres complexes

Dans ce paragraphe, $\mathscr{P}$ dérisgne un plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$



Définition: Soit $M \in \mathscr{P}$. On note (x, y) les coordonnées du point M par rapport au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
L'affixe de M est le nombre

$$z_M = x + iy \in \mathbb{C}$$

Soit $\vec{w} \in \vec{\mathscr{P}}$ (le plan des vecteurs) et (a, b) les coordonées de $\vec{w}$.
L'affixe de $\vec{w}$ est

$$z_{\vec{w}} = a + ib \in \mathbb{C}$$

Proposition: Soit $(A, B) \in \mathscr{P}^2$ et $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \in \vec{\mathscr{P}}^2$

1. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
2. $z_{\overrightarrow{w_1}+\overrightarrow{w_2}} = z_{\overrightarrow{w_1}} + z_{\overrightarrow{w_2}}$

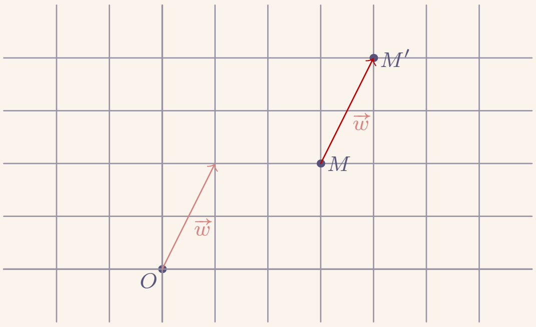
□

Proposition: Soit $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \in \vec{\mathscr{P}}^2$ avec $\overrightarrow{w_1} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{w_2} \neq \vec{0}$
Alors, $\left|\dfrac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}}\right| = \dfrac{\|\overrightarrow{w_1}\|}{\|\overrightarrow{w_2}\|}$ et $\arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}}\right) = \underbrace{\widehat{(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})}}_{\text{l'angle entre } \overrightarrow{w_1} \text{ et } \overrightarrow{w_2}}$

■

Corollaire: Avec les hypothèses et notations précédentes,

1. $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ sont colinéaires $\iff \dfrac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}} \in \mathbb{R}$
2. $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ sont orthogonaux $\iff \dfrac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}} \in i\mathbb{R}$



Définition: Soit $\vec{w} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$. La translation de vecteur $\vec{w}$ est l'application

$$\begin{aligned} t_{\vec{w}} : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

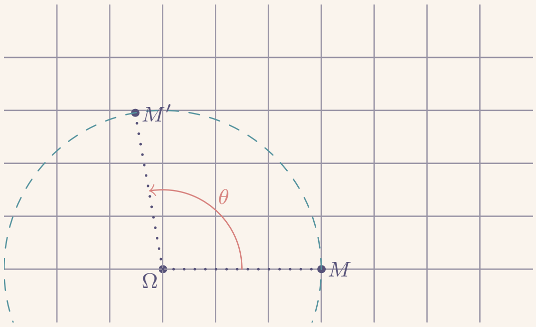
où M' vérifie $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$

Proposition: Soit $\vec{w} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$ et $(M, M') \in \mathscr{P}^2$

$$M' = t_{\vec{w}}(M) \iff z_{M'} = z_M + z_{\vec{w}}$$

Proposition: Soient $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$.

$$t_{\overrightarrow{w_2}} \circ t_{\overrightarrow{w_1}} = t_{\overrightarrow{w_1}+\overrightarrow{w_2}}$$



Définition: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
La rotation de centre Ω et d'angle θ est l'application

$$\begin{aligned} \rho_{\Omega,\theta} : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où M' vérifie

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{\Omega M}\| = \|\overrightarrow{\Omega M'}\| \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta \end{cases}$$

Proposition: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ d'affixe ω, $\theta \in \mathbb{R}$ et $(M, M') \in \mathscr{P}^2$

$$(*) : \qquad M' = \rho_{\Omega,\theta}(M) \iff z_{M'} = \omega + e^{i\theta}(z_M - \omega)$$

■

Remarque (Cas particulier):
Si $\Omega = O$ alors

$$(*) \iff z_{M'} = e^{i\theta} z_M$$

Corollaire: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ d'affixe ω et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \rho_{\Omega,\theta} &= t_{\overrightarrow{O\Omega}} \circ \rho_{O,\theta} \circ t_{\overrightarrow{\Omega O}} \\ &= t_{\overrightarrow{O\Omega}} \circ \rho_{O,\theta} \circ (t_{\overrightarrow{O\Omega}})^{-1} \end{aligned}$$

Proposition: Soient $(\Omega_1, \Omega_2) \in \mathscr{P}^2$ et $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\rho_{\Omega_1,\theta_1} \circ \rho_{\Omega_1,\theta_2} = \rho_{\Omega_1,\theta_1+\theta_2} = \rho_{\Omega_1,\theta_2} \circ \rho_{\Omega_1,\theta_1}$$

Si $\begin{cases} \Omega_1 \neq \Omega_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0 \ [2\pi] \end{cases}$ alors $\rho_{\Omega_1,\theta_1} \circ \rho_{\Omega_2,\theta_2}$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$

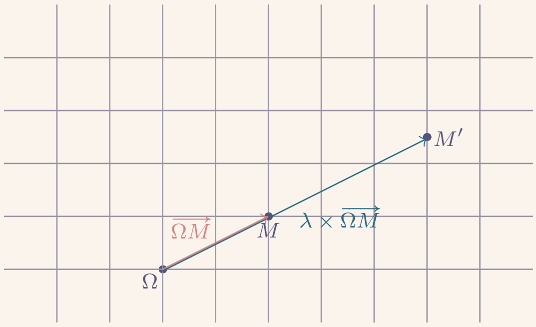
Si $\begin{cases} \Omega_1 \neq \Omega_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \equiv 0 \ [2\pi] \end{cases}$ alors $\rho_{\Omega_1,\theta_1} \circ \rho_{\Omega_2,\theta_2}$ est une translation

■

Proposition: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ d'affixe ω, $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$ d'affixe u. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \not\equiv 0 \ [2\pi]$.

— $t_{\overrightarrow{w}} \circ \rho_{\Omega,\theta}$ est une rotation d'angle θ
— $\rho_{\Omega,\theta} \circ t_{\overrightarrow{w}}$ est aussi une rotation d'angle θ

■



Définition: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
L'<u>homothétie</u> de centre Ω et de rapport λ est l'application

$$\begin{aligned} h_{\Omega,\lambda} : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où M' vérifie $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$

Proposition: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ d'affixe ω, $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient $M \in \mathscr{P}$ d'affixe z et $M' \in \mathscr{P}$ d'affixe z'.

$$M' = h_{\Omega,\lambda}(M) \iff z' = \omega + \lambda(z - \omega)$$

■

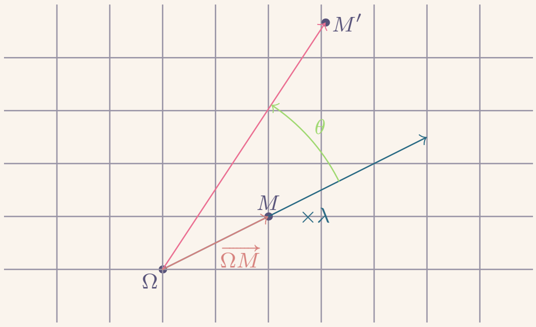
Proposition: Soient $(\Omega_1, \Omega_2) \in \mathscr{P}^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathscr{P}^2$

1. Si $\Omega_1 = \Omega_2$ alors, $h_{\Omega_1,\lambda_1} \circ h_{\Omega_2,\lambda_2} = h_{\Omega_1,\lambda_1\lambda_2}$
2. Si $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$, alors, $h_{\Omega_1,\lambda_1} \circ h_{\Omega_2,\lambda_2}$ est une homotéthie de rapport $\lambda_1\lambda_2$
3. Si $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\lambda_1\lambda_2 = 1$, alors, $h_{\Omega_1,\lambda_1} \circ h_{\Omega_2,\lambda_2}$ est une translation.

□

Proposition: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$.
Alors, $t_{\overrightarrow{w}} \circ h_{\Omega,\lambda}$ et $h_{\Omega,\lambda} \circ t_{\overrightarrow{w}}$ sont homothéties de rapport λ. □

Remarque (Cas particulier):
Soit $M \in \mathscr{P}$ d'affixe z, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M' = h_{O,\lambda}(M)$ d'affixe z'
On a $z' = \lambda z$



Définition: Soient $\Omega \in \mathscr{P}$, $(\theta, \lambda) \in \mathbb{R}^2$. La <u>similitude (directe)</u> de centre Ω, d'angle θ et de rapport λ est

$$S_{\Omega,\theta,\lambda} = h_{\Omega,\lambda} \circ \rho_{\Omega,\theta}$$

Proposition: Avec les notations précédentes,

$$S_{\Omega,\theta,\lambda} = \rho_{\Omega,\theta} \circ h_{\Omega,\lambda}$$

■

Proposition: L'expression complexe de $S_{\Omega,\theta,\lambda}$ est

$$z' = \omega + \lambda e^{i\theta}(z - \omega)$$

Quatrième partie

Exponentielle complexe

Définition: Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$\exp(z) = e^{\mathfrak{Re}(z)} \times (\cos(\mathfrak{Im}(z)) + i \sin(\mathfrak{Im}(z))$$

Ainsi, si $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\exp(z) = \exp(a + ib) = e^a \times (\cos(b) + i(\sin(b)) = e^a e^{ib}$$

Proposition: Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

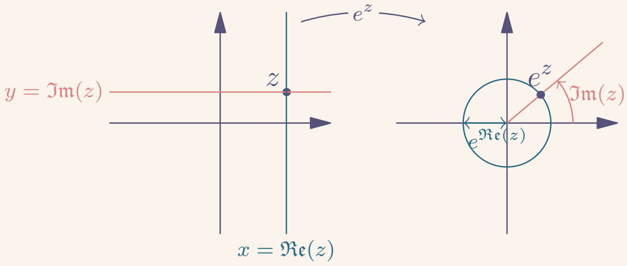
$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \times \exp(z_2)$$

■

Remarque (Notation):
On écrit e^z à la place de $\exp(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$.

Proposition:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} |e^z| = e^{\mathfrak{Re}(z)} \\ \arg(e^z) \equiv \mathfrak{Im}(z) \quad [2\pi] \end{cases}$$



Remarque:
$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ n'est pas bijective :

— $\begin{cases} \exp(0) = \exp(2i\pi) = 1 \\ 0 \neq 2i\pi \end{cases}$

— 0 n'a pas d'antécédant

Il n'y a donc pas de logarithme complexe.

Cinquième partie

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

Définition: Soit f définie sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ ($\forall x \in D, f(x) \in \mathbb{C}$)
On pose :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Re}(f) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathfrak{Re}(f(x)) \end{aligned}$$

et

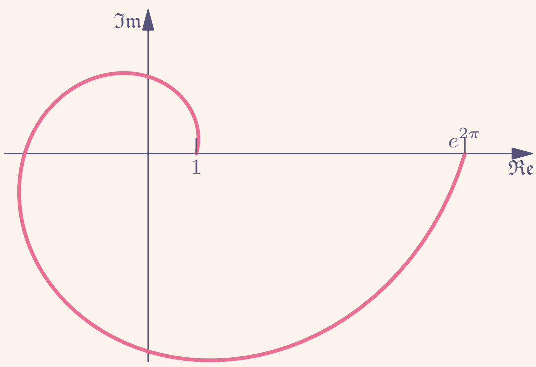
$$\begin{aligned} \mathfrak{Im}(f) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathfrak{Im}(f(x)) \end{aligned}$$

Définition: Soit $f : D \to \mathbb{C}$. On dit que
- f est continue si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont continues
- f est dérivable si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont dérivables.
  Dans ce cas, la dérivée de f est

$$\begin{aligned} f' : D &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \mathfrak{Re}(f)'(x) + i\mathfrak{Im}(f)'(x) \end{aligned}$$

Remarque:
On peut représenter f de la façon suivante.

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{(1+i)t} \end{aligned}$$



Proposition: Soient u et v deux fonctions dérivables sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$
1. $u + v$ dérivable et $(u + v)' = u' + v'$
2. uv dérivable et $(uv)' = u'v + v'u$
3. Si $v \neq 0$, $\frac{u}{v}$ dérivable et $\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

■

Proposition: Soit $v : D \to \mathbb{R}$ et $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables (avec $D \subset \mathbb{R}$). Alors, $u \circ v$ est dérivable et

$$(u \circ v)' = (u' \circ v) \times v'$$

■

Proposition: Soit $u : D \to \mathbb{C}$ et $f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{u(x)} \end{array}$

Alors, f est dérivable sur D et

$$\forall x \in D, f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

■