Chapitre 4

Fonctions usuelle

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Logarithme népérien

Théorème (théorème fondamental de l'analyse)**:** Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors il existe F dérivable sur I telle que

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x).$$

■

Définition: La fonction <u>ln</u> est l'unique primitive sur $\mathbb{R}_*^+$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

Proposition:
1. $\ln 1 = 0$;
2. ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0, \ln' x = \frac{1}{x}.$$

□

Corollaire:

$$\forall x > 0, \ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

■

Remarque:

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}_*^- &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(-x) \end{aligned}$$

u est dérivable sur $\mathbb{R}_*^-$ et

$$\forall x < 0, u'(x) = \ln'(-x) \times (-1) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Donc u est une primite de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_*^-$.

Soit $v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\big(|x|\big). \end{array}$ $|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc v aussi.

$$\forall x > 0, v(x) = \ln x$$
$$\text{donc } \forall x > 0, v'(x) = \frac{1}{x}.$$

$$\forall x < 0, v(x) = \ln(-x) = u(x)$$
$$\text{donc } \forall x < 0, v'(x) = \frac{1}{x}.$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}^*, v'(x) = \frac{1}{x}$. Ainsi, v est <u>une</u> primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ mais cette primitive n'est pas unique :

$$\begin{aligned} w : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 + \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) - 3 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

est une autre primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Corollaire: ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.

■

Proposition: Soit f une fonction croissante sur $]a, b[$ avec $\begin{cases} a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}. \end{cases}$ et $a < b$.

1. Si f est majorée, $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) \in \mathbb{R}$.
2. Si f n'est pas majorée, $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = +\infty$.
3. Si f est minorée, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) \in \mathbb{R}$.
4. Si f n'est pas minorée, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$.

□

Proposition:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_*^+, \ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

■

Corollaire: Soit $a > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors $\ln(a^n) = n \ln(a)$.

■

Corollaire:

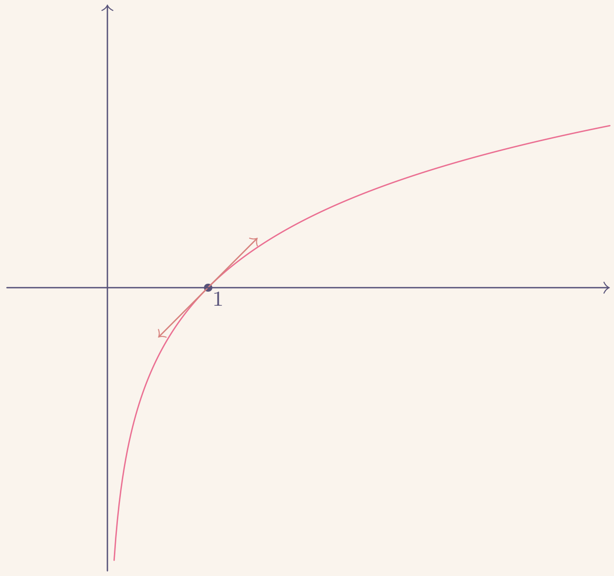
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty \end{cases}$$

■

Proposition:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

■


1

Deuxième partie

Exponentielle

Proposition: $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est bijective.

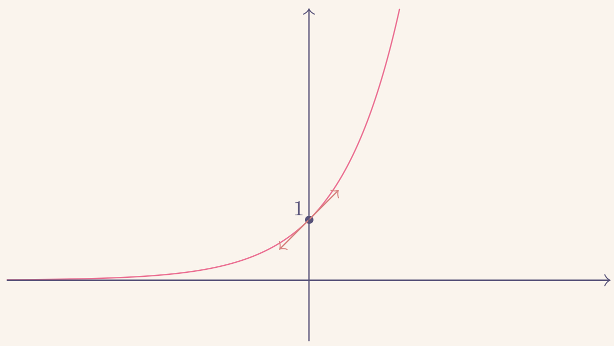
■

Définition: La fonction exponentielle est la réciproque du logarithme népérien. On la note exp.

Proposition:

1. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$;
2. $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty; \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0; \end{cases}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp(x)}{x} = +\infty$;
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

■



Troisième partie

Fonctions puissances

Remarque (Rappel):

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall x > 0, x^a = \exp(a \ln x).$$

En particulier, en posant $x = e = \exp(1)$, on a donc

$$\forall a \in \mathbb{R}, e^a = \exp(a).$$

Remarque (Notation):

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour ce chapitre, on note $p_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^a. \end{array}$

Proposition: Soit $a \in \mathbb{R}$. p_a est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et

$$\forall x > 0, p_a'(x) = ax^{a-1}.$$

■

Corollaire:

1. $\forall a \in \mathbb{R}_-^*$, p_a est strictement décroissante.
2. $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, p_a est strictement croissante.
3. p_0 est la fonction constante égale à 1.

■

Proposition:

1. Si $a > 0$, $\begin{cases} p_a(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty, \\ p_a(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0 \\ >}]{} 0; \end{cases}$
2. Si $a < 0$, $\begin{cases} p_a(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0, \\ p_a(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0 \\ >}]{} +\infty; \end{cases}$
3. Si $a = 0$, $\begin{cases} p_a(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1, \\ p_a(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0 \\ >}]{} 1. \end{cases}$

■

Proposition: On suppose $a > 0$.

1. Si $a > 1$, alors $\dfrac{p_a(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$;
2. Si $a < 1$, alors $\dfrac{p_a(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$;
3. Si $a = 1$, alors $\forall x > 0, p_a(x) = x$.

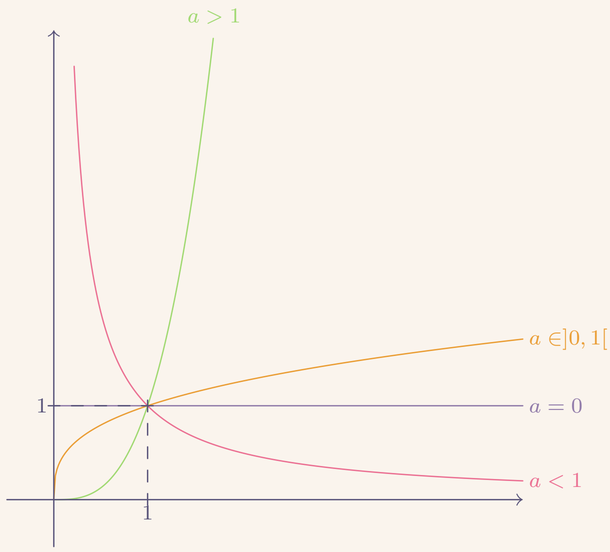
■

Proposition: On suppose $a > 0$. On peut prolonger p_a par continuité en 0 en posant $p_a(0) = 0$.

1. Si $a > 1$, alors $p_a'(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0 \\ >}]{} 0$;

2. Si $a < 1$, alors $p'_a(x) \xrightarrow[x \to 0, >]{} +\infty$;

■



Proposition (croissances comparées)**:** Soient $a, b \in \mathbb{R}_*^+$. Alors,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^a(x)}{x^b} = 0.$$

■

Corollaire:

$$x \ln x \xrightarrow[x \to 0, >]{} 0.$$

■

Corollaire: Soit $a > 0$. Alors

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0.$$

■

Quatrième partie

Exponentielle et logarithme de base a

Définition: Soit $a > 0$. L'application $\exp_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_*^+ \\ x & \longmapsto & a^x = e^{x \ln a} \end{array}$ est appelée <u>exponentielle de base a</u>.

Remarque:
L'exponentielle de base e est l'exponentielle classique.

Proposition: $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

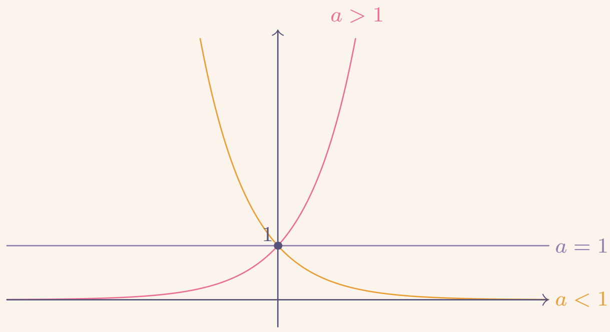
$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp_a'(x) = \ln(a)\exp_a(x) = a^x \ln a.$$

□

Corollaire:
1. Si $a \in]0,1[$, alors $\exp_a$ est strictement décroissante.
2. Si $a > 1$, alors $\exp_a$ est strictement croissante.
3. Si $a = 1$, alors $\exp_a(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

□

Proposition:
1. Si $a \in]0,1[$,
   - $\exp_a(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$,
   - $\exp_a(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$,
   - $\dfrac{\exp_a(x)}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$;
2. Si $a > 1$,
   - $\exp_a(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$,
   - $\dfrac{\exp_a(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$,
   - $\exp_a(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$;



Proposition: Si $a \in \mathbb{R}_*^+ \setminus \{1\}$, alors $\exp_a$ est bijective.

Définition: Soit $a > 0$ et $a \neq 1$.

La réciproque de $\exp_a$ est appelé logarithme de base a et est noté $\log_a$.

Proposition: Si $a \in \mathbb{R}_*^+ \setminus \{1\}$, alors

$$\forall x > 0, \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

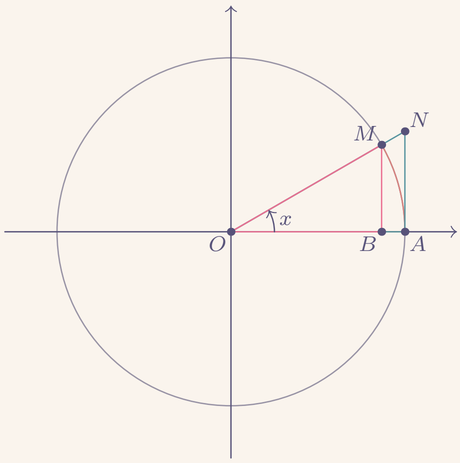
■

Cinquième partie

Fonctions trigonométriques

Proposition:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

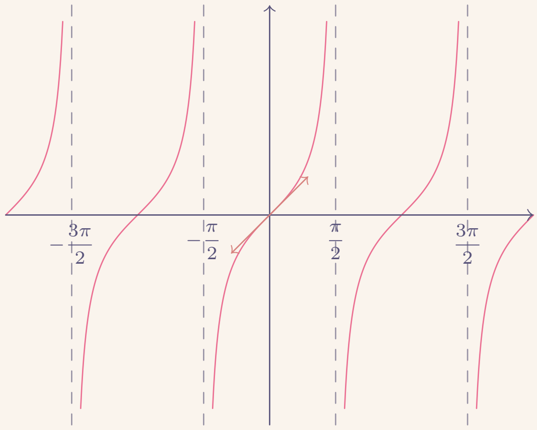


Corollaire: sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\begin{cases} \sin' = \cos, \\ \cos' = -\sin . \end{cases}$

Proposition: La fonction tan est dérivable sur $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]\right\} = D$ et

$$\forall x \in D, \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

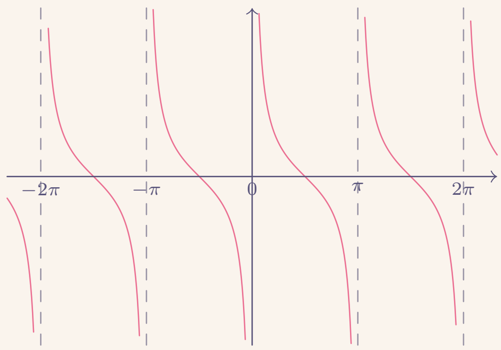
Proposition: $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{\pi}{2} \\ <}} \tan x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{\pi}{2} \\ >}} = -\infty$.



Proposition: cotan est dérivable sur $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \equiv 0 \ \ [\pi]\}$ et

$$\forall x \in D, \operatorname{cotan}' x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{cotan}^2 x.$$

Proposition: $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ <}} \operatorname{cotan} x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ >}} \operatorname{cotan} x = +\infty$.



Sixième partie

Fonctions trigonométriques réciproques

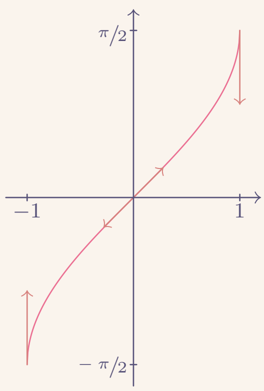
Proposition – Définition: L'application $\begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$ est bijective.
On appelle arcsinus la réciproque de cette bijection et on la note Arcsin.

Pour tout $x \in [-1,1]$, $\operatorname{Arcsin} x$ est le seul angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ donc le sinus vaut x. □

Proposition:
1. $\forall x \in [-1,1], \operatorname{Arcsin} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
2. $\forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \operatorname{Arcsin}(\sin\theta) = \theta$
3. $\forall x \in [-1,1], \sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$
4. $\forall x \in [-1,1], \cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$

■

Proposition:
1. Arcsin est impaire
2. Arcsin est continue sur $[-1,1]$
3. Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et
$$\forall x \in]-1,1[, \operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$$
4. Arcsin n'est pas dérivable en 1 et en -1.



■

Remarque:
Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ est Arcsin.

Proposition – Définition: L'application $\begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$ est bijective. On note sa réciproque Arccos.

En d'autres termes, pour $x \in [-1,1]$, $\operatorname{Arccos} x$ est le seul angle $\boxed{\text{compris entre } 0 \text{ et } \pi}$ dont le cosinus vaut x.

Proposition:

1. $\forall x \in [-1,1]$, $\operatorname{Arccos} x \in [0,\pi]$,
2. $\forall \theta \in [0,\pi]$, $\operatorname{Arccos}(\cos\theta) = \theta$,
3. $\forall x \in [-1,1]$, $\cos(\operatorname{Arccos} x) = x$,
4. $\forall x \in [-1,1]$, $\sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2}$.

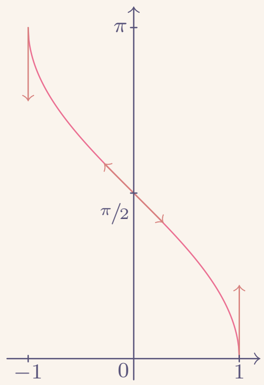
Proposition:

1. Arccos est continue sur $[-1,1]$,
2. Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \operatorname{Arccos}' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Corollaire:

$$\forall x \in [-1,1],\ \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$$

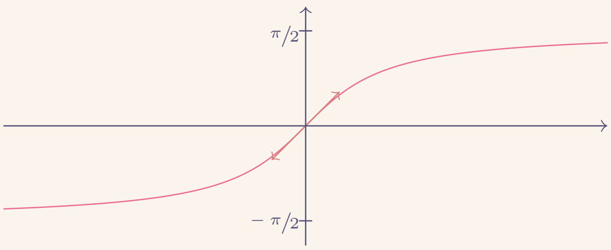


Proposition – Définition: L'application $\begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x \end{array}$ est bijective. On note Arctan la réciproque de cette bijection.

C'est à dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan} x$ est le seul angle $\boxed{\text{compris entre } -\frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{\pi}{2} \text{ (exclus)}}$ dont la tangente vaut x.

Proposition:

1. Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{Arctan}' x = \frac{1}{1+x^2},$$
2. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan} x = \dfrac{\pi}{2}, \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{Arctan} x = -\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$
3. Arctan est impaire.



■

Proposition:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

■

Septième partie

Trigonométrie hyperbolique

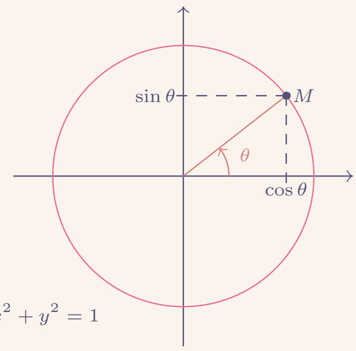
Définition: Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\begin{cases} \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}. \end{cases}$$

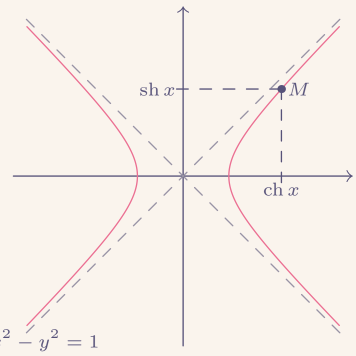
ch est appelé cosinus hyperbolique, sh est appelé sinus hyperbolique et th est appelé tangeante hyperbolique.

Remarque:
Ces formules rappèlent les formules d'Euler : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \longleftrightarrow \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \longleftrightarrow \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



$x^2 + y^2 = 1$

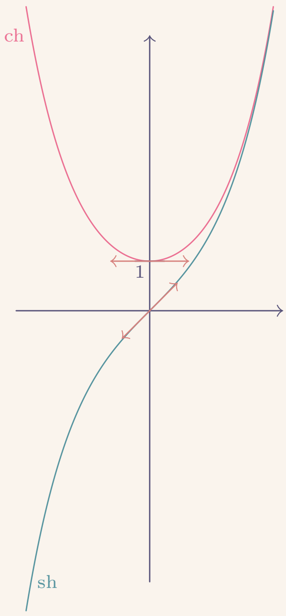


$x^2 - y^2 = 1$

Proposition:
$$\forall t \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1.$$

■

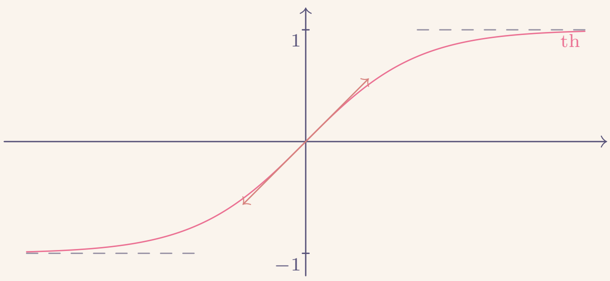
Proposition:
1. ch est paire, sh est impaire ;
2. ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\begin{cases} \operatorname{ch}' = \operatorname{sh}, \\ \operatorname{sh}' = \operatorname{ch}; \end{cases}$
3. sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$;
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$;
5. $\operatorname{ch} x \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^x$ et $\operatorname{sh} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^x$.



∎

Remarque:
La courbe représentative de ch est appelée "chaînette".

Proposition:
1. th est imapire ;
2. th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x;$$
3. th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{th} x = -1$.



∎