Chapitre 4

Fonctions usuelle

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Logarithme népérien

Théorème (théorème fondamental de l'analyse)**:** Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors il existe F dérivable sur I telle que

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x).$$

Preuve (c.f. chapitre 5 : calcul intégral)*:*

□

Définition: La fonction <u>ln</u> est l'unique primitive sur $\mathbb{R}_*^+$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

Proposition:
1. $\ln 1 = 0$;
2. ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0, \ln' x = \frac{1}{x}.$$

□

Corollaire:

$$\forall x > 0, \ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Preuve:
Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_*^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \varphi(x) &= [\ln t]_1^x \\ &= \ln x - \ln 1 \\ &= \ln x \end{aligned}$$

□

Remarque:

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}_*^- &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(-x) \end{aligned}$$

u est dérivable sur $\mathbb{R}_*^-$ et

$$\forall x < 0, u'(x) = \ln'(-x) \times (-1) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Donc u est une primite de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_*^-$.

Soit $v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\big(|x|\big). \end{array}$ $|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc v aussi.

$$\forall x > 0, v(x) = \ln x$$
$$\text{donc } \forall x > 0, v'(x) = \frac{1}{x}.$$

$$\forall x < 0, v(x) = \ln(-x) = u(x)$$
$$\text{donc } \forall x < 0, v'(x) = \frac{1}{x}.$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}^*, v'(x) = \dfrac{1}{x}$. Ainsi, v est <u>une</u> primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ mais cette primitive n'est pas unique :

$$\begin{aligned} w : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 + \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) - 3 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

est une autre primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Corollaire: ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.

Preuve:

$$\forall x > 0, \ln' x = \frac{1}{x} > 0.$$

□

Proposition: Soit f une fonction croissante sur $]a, b[$ avec $\begin{cases} a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}. \end{cases}$ et $a < b$.

1. Si f est majorée, $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) \in \mathbb{R}$.
2. Si f n'est pas majorée, $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = +\infty$.
3. Si f est minorée, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) \in \mathbb{R}$.
4. Si f n'est pas minorée, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$.

□

Proposition:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_*^+, \ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

Preuve:
Soit $a > 0$ et $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(ax). \end{array}$

u est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et

$$\forall x > 0, u'(x) = \ln'(ax) \times a = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$$

Donc u est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_*^+$. Comme $\mathbb{R}_*^+$ est un intervalle, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, u(x) = \ln x + C.$$

En particulier,

$$\begin{array}{ccc} u(1) & = & \ln 1 + C \\ \| & & \| \\ \ln a & = & C \end{array}$$

Donc

$$\forall x > 0, \ln(ax) = \ln x + \ln a.$$

$\square$

Corollaire: Soit $a > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

Preuve (par récurrence sur n)*:*
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathscr{P}(n) : \text{“}\ln(a^n) = n \ln a\text{”}.$$

— Avec $n = 0$, $\ln(a^n) = \ln 1 = 0 = 0 \times \ln a$
— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} \ln(a^{n+1}) &= \ln(a \times a^n) \\ &= \ln a + \ln(a^n) \\ &= \ln a + n \ln a \\ &= (n+1) \ln a \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ln(a^n) = n \ln a.$$

—
$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln a = \ln\left(\frac{1}{a} \times a\right) = \ln 1 = 0$$

donc $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$

— Soit $n \in \mathbb{Z}^-$. Alors,

$$\ln(a^n) = \ln\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}\right) = -n \ln \frac{1}{a} = n \ln a.$$

$\square$

Corollaire:

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \end{cases}$$

Preuve:
Comme ln est croissante sur $]0,+\infty[$, on sait que $\lim_{x\to+\infty} \ln x$ existe. C'est un réle ou $+\infty$.

Supposons cette limite réelle : on pose $\lim_{x\to+\infty} \ln x = \ell \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \ln(2^n) = \ell$ car $2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Or,

$$\forall x \in \mathbb{N}, \ln(2^n) = n \ln 2$$

et $2 > 1$ donc $\ln 2 > \ln 1 = 0$ donc $n \ln 2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$: une contradiction.

Donc $\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

$$\forall x > 0, \ln x = -\ln \frac{1}{x} \xrightarrow[\substack{x\to 0 \\ >}]{} -\infty$$

car $\frac{1}{x} \xrightarrow[\substack{x\to 0 \\ >}]{} +\infty$. □

Proposition:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Preuve:
Soit $x \geqslant 1$. On a

$$0 = \ln 1 \leqslant \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t.$$

et

$$\forall t \in [1, x], t \geqslant \sqrt{t}$$

donc

$$\forall t \in [1, x], \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

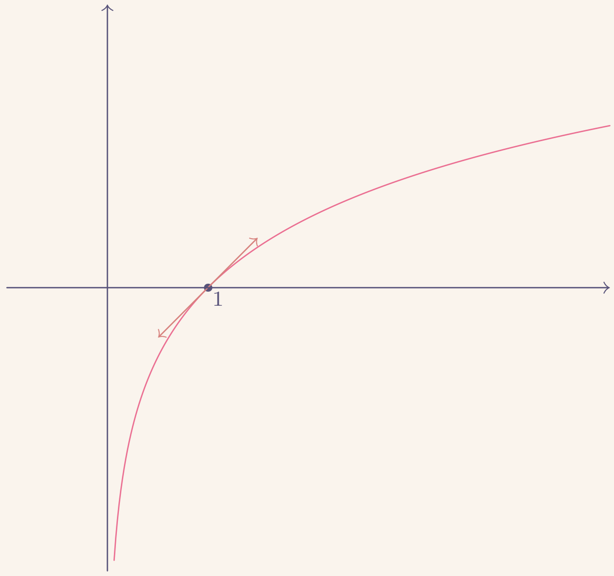
Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\ln x = \int_0^1 \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \leqslant \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t = \left[2\sqrt{t}\right]_1^x = 2\sqrt{x} - 2.$$

Ainsi,

$$\forall x \geqslant 1, 0 \leqslant \frac{\ln x}{x} \leqslant 2\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}.$$

Par encadrement, on a donc $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. □


1

Deuxième partie

Exponentielle

Proposition: $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est bijective.

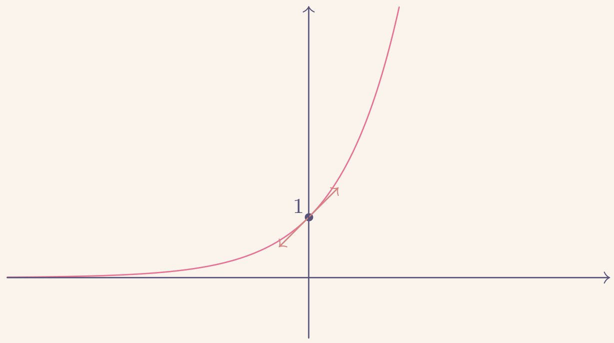
Preuve:
ln est continue sur $\mathbb{R}_*^+$ (car elle est dérivable) et strictement croissante, donc elle établit une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\left] \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x, \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x \right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. □

Définition: La fonction exponentielle est la réciproque du logarithme népérien. On la note exp.

Proposition:
1. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$;
2. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty; \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0; \end{cases}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x} = +\infty$;
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Preuve:
1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\ln'\big(\exp(x)\big) = \frac{1}{\exp(x)} \neq 0$$
donc exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \frac{1}{\ln'\big(\exp(x)\big)} = \exp(x).$$
2. — $\ln u \xrightarrow[u\to 0]{} -\infty$ donc $\exp(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$
— $\ln u \xrightarrow[u\to+\infty]{} +\infty$ donc $\exp(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $x = \ln u$ $\big(\iff u = \exp(x)\big)$. Donc
$$\frac{\exp(x)}{x} = \frac{u}{\ln u} = \frac{1}{\frac{\ln u}{u}} \xrightarrow[u\to+\infty]{} +\infty.$$
4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On pose $\begin{cases} a = \ln \alpha, \\ b = \ln \beta. \end{cases}$
On a $\exp(a) \times \exp(b) = \alpha\beta$ et
$$\begin{aligned} \exp(a+b) &= \exp\big(\ln(\alpha) + \ln(\beta)\big) \\ &= \exp\big(\ln(\alpha\beta)\big) \\ &= \alpha\beta \end{aligned}$$

□


1

Troisième partie

Fonctions puissances

Remarque (Rappel):

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall x > 0, x^a = \exp(a \ln x).$$

En particulier, en posant $x = e = \exp(1)$, on a donc

$$\forall a \in \mathbb{R}, e^a = \exp(a).$$

Remarque (Notation):

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour ce chapitre, on note $p_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^a. \end{array}$

Proposition: Soit $a \in \mathbb{R}$. p_a est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et

$$\forall x > 0, p_a'(x) = a x^{a-1}.$$

Preuve:

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, p_a(x) = e^{a \ln x}.$$

Or, ln, exp, $x \mapsto ax$ sont dérivables sur leur domaine de définition donc p_a aussi et

$$\forall x > 0, p_a'(x) = \frac{a}{x} e^{a \ln x} = \frac{a}{x} x^a = a x^{a-1}.$$

□

Corollaire:
1. $\forall a \in \mathbb{R}_-^*$, p_a est strictement décroissante.
2. $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, p_a est strictement croissante.
3. p_0 est la fonction constante égale à 1.

Preuve:
Pour tout $x > 0$, $p_a'(x)$ est du signe de a puisque

$$x^{a-1} = e^{(a-1)\ln x} > 0.$$

□

Proposition:
1. Si $a > 0$, $\begin{cases} p_a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty, \\ p_a(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ >}]{} 0; \end{cases}$
2. Si $a < 0$, $\begin{cases} p_a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0, \\ p_a(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ >}]{} +\infty; \end{cases}$
3. Si $a = 0$, $\begin{cases} p_a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1, \\ p_a(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ >}]{} 1. \end{cases}$

Preuve:
À faire $\square$

Proposition: On suppose $a > 0$.

1. Si $a > 1$, alors $\dfrac{p_a(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$;
2. Si $a < 1$, alors $\dfrac{p_a(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$;
3. Si $a = 1$, alors $\forall x > 0, p_a(x) = x$.

Preuve:

$$\forall x > 0, \frac{p_a(x)}{x} = \frac{x^a}{x} = x^{a-1}.$$

$\square$

Proposition: On suppose $a > 0$. On peut prolonger p_a par continuité en 0 en posant $p_a(0) = 0$.

1. Si $a > 1$, alors $p'_a(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ >}]{} 0$;
2. Si $a < 1$, alors $p'_a(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ >}]{} +\infty$;

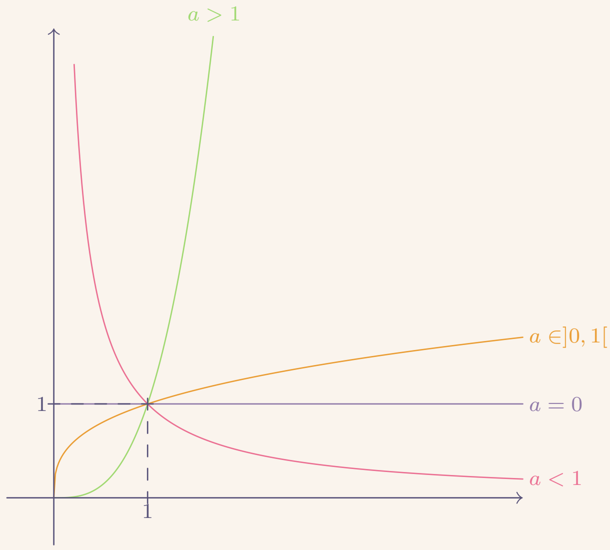
Preuve: 1. On suppose $a > 1$. Alors,

$$\forall x > 0, p'_a(x) = ax^{a-1} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ >}]{} 0.$$

2. On suppose $a < 1$.

$$\forall x > 0, p'_a(x) = ax^{a-1} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ >}]{} +\infty.$$

$\square$



Proposition (croissances comparées)**:** Soient $a, b \in \mathbb{R}_*^+$. Alors,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^a(x)}{x^b} = 0.$$

Exemple:
Si on ne dispose pas de la formule :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \ ?$$

On a

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{2\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} = \underbrace{2\ \frac{\ln u}{u}}_{\xrightarrow[u \to +\infty]{} 0} \quad \text{avec } u = \sqrt{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

Preuve:

$$\forall x > 1, \frac{\ln^a(x)}{x^b} = \frac{e^{a\ln(\ln x)}}{e^{b\ln x}} = e^{a\ln(\ln x) - b\ln x}.$$

Or $\ln(\ln x) \underset{x \to +\infty}{=} o(\ln x)$ car $\dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x} = \underbrace{\dfrac{\ln u}{u}}_{\xrightarrow[u \to +\infty]{} 0}$ avec $u = \ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

Donc,

$$\frac{\ln^a(x)}{x^b} = e^{o(\ln x) - b\ln x} = e^{\ln(x)\left(-b + o(1)\right)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

car $\begin{cases} -b + o(1) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -b < 0 \\ \ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty. \end{cases}$ □

Corollaire:

$$x \ln x \xrightarrow[x \underset{>}{\to} 0]{} 0.$$

Preuve:
Pour $x \in]0,1[$, on pose $u = \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x \underset{>}{\to} 0]{} +\infty$.

Donc,

$$\begin{aligned}\forall x \in]0,1[, x \ln x &= \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{u} \\ &= -\frac{\ln u}{u} \xrightarrow[u \to +\infty]{} 0.\end{aligned}$$

□

Corollaire: Soit $a > 0$. Alors

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0.$$

Preuve:
On fait le changement de variables $u = e^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

$$\forall x > 0, \frac{x^a}{e^x} = \frac{\ln^a u}{u} \xrightarrow[u \to +\infty]{} 0.$$

□

Quatrième partie

Exponentielle et logarithme de base a

Définition: Soit $a > 0$. L'application $\exp_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_*^+ \\ x & \longmapsto & a^x = e^{x \ln a} \end{array}$ est appelée <u>exponentielle de base a</u>.

Remarque:
L'exponentielle de base e est l'exponentielle classique.

Proposition: $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

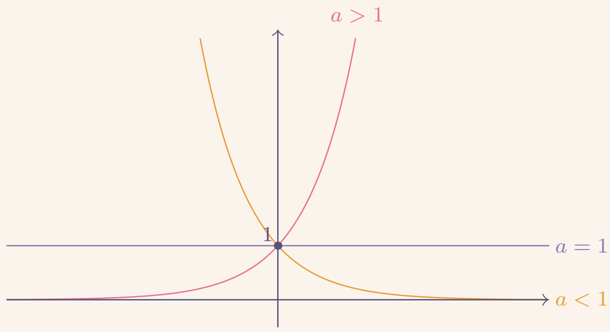
$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp_a'(x) = \ln(a) \exp_a(x) = a^x \ln a.$$

□

Corollaire:
1. Si $a \in]0, 1[$, alors $\exp_a$ est strictement décroissante.
2. Si $a > 1$, alors $\exp_a$ est strictement croissante.
3. Si $a = 1$, alors $\exp_a(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

□

Proposition:
1. Si $a \in]0, 1[$,
   - $\exp_a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$,
   - $\exp_a(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$,
   - $\dfrac{\exp_a(x)}{x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$;
2. Si $a > 1$,
   - $\exp_a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$,
   - $\dfrac{\exp_a(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$,
   - $\exp_a(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$;



Proposition: Si $a \in \mathbb{R}_*^+ \setminus \{1\}$, alors $\exp_a$ est bijective.

Définition: Soit $a > 0$ et $a \neq 1$.

La réciproque de $\exp_a$ est appelé <u>logarithme de base a</u> et est noté $\log_a$.

Proposition: Si $a \in \mathbb{R}_*^+ \setminus \{1\}$, alors

$$\forall x > 0, \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Preuve:
Soit $a \in \mathbb{R}_*^+ \setminus \{1\}$.

— Soit $x > 0$,

$$\exp_a\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) = e^{\frac{\ln x}{\ln a} \times \ln a} = e^{\ln x} = x$$

— Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\ln\left(\exp_a(x)\right)}{\ln a} = \frac{\ln\left(e^{x \ln a}\right)}{\ln a} = \frac{x \ln a}{\ln a} = x.$$

Donc, $\log_a : x \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln a}$ est bien la réciproque de $\exp_a$. □

Exemple:
Combien y a-t-il de chiffres dans la représentation décimale de 2^{2021} ?

Soit $N \in \mathbb{N}$. La représentation décimale de 2^{2021} a N chiffres si et seulement si

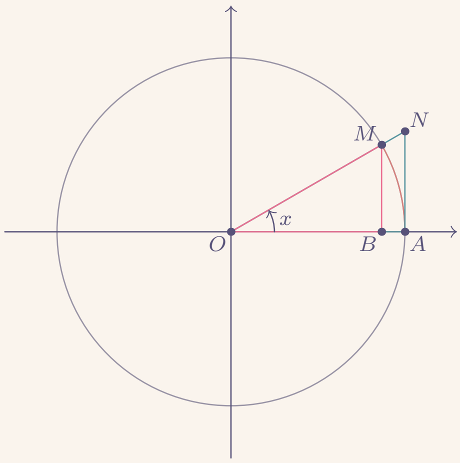
$$\begin{aligned}
& 10^{N-1} \leqslant 2^{2021} < 10^N \\
\iff & N - 1 \leqslant \log_{10}\left(2^{2021}\right) < N \\
\iff & N - 1 \leqslant 2021 \log_{10} 2 < N \\
\iff & N > 2021 \log_{10} 2 \text{ et } N \leqslant 2021 \log_{10}(2) + 1 \\
\iff & \underbrace{2021 \log_{10} 2}_{\simeq 608{,}3} < N \leqslant 2021 \log_{10}(2) + 1 \implies \qquad N = 609.
\end{aligned}$$

Cinquième partie

Fonctions trigonométriques

Proposition:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



Preuve:
Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose $M(\cos x, \sin x)$ et $N(1, \tan x)$.

Le triangle OBM est contenu dans le secteur OAM donc

$$\frac{\cos(x)\sin(x)}{2} \leqslant \frac{x}{2}.$$

Le secteur OAM est contenu dans le triangle OAN donc

$$\frac{x}{2} \leqslant \frac{\tan x}{2} = \frac{\sin x}{2\cos x}.$$

D'où,

$$\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{1}{\cos x}$$

Or, $\cos x \xrightarrow[x \to 0 \atop >]{} 1$ et $\frac{1}{\cos x} \xrightarrow[x \to 0 \atop >]{} 1$.

Par encadrement, on en déduit que

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0 \atop >]{} 1$$

et

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[, \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x} \xrightarrow[x \to O \atop >]{} 1 \text{ d'après le calcul précédent.}$$

$\square$

Corollaire: sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\begin{cases} \sin' = \cos, \\ \cos' = -\sin. \end{cases}$

Preuve:
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h}\\ &= \frac{-1+\cos h}{h}\sin x + \frac{\sin h}{h}\cos x\\ &= \sin x \times \frac{-2\sin^2\frac{h}{2}}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

Or, $\sin^2 \frac{h}{2} \underset{h\to 0}{\sim} \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{h^2}{4}$. Alors

$$\frac{\sin^2\frac{h}{2}}{h} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{h}{4} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Donc,

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \cos x.$$

Également, $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \times (-1) = -\sin x.$$

$\square$

Proposition: La fonction tan est dérivable sur $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]\right\} = D$ et

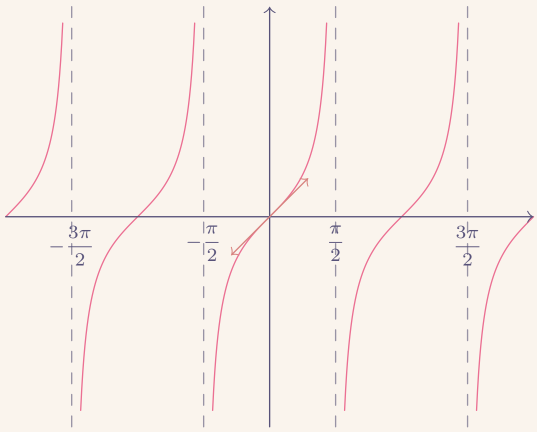
$$\forall x \in D, \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Preuve:
$\forall x \in D, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$; sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc tan est dérivable sur D.

$$\forall x \in D, \tan' x = \underset{\displaystyle 1+\tan^2 x}{\underset{\parallel}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$\square$

Proposition: $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \tan x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ >}} = -\infty$. $\square$



Proposition: cotan est dérivable sur $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \equiv 0 \ \ [\pi]\}$ et

$$\forall x \in D, \operatorname{cotan}' x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{cotan}^2 x.$$

Preuve:
On a

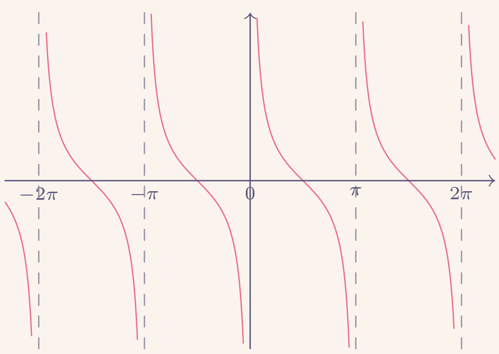
$$\forall x \in D, \operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Donc,

$$\forall x \in D, \operatorname{cotan}' x = \underset{\displaystyle -1 - \operatorname{cotan}^2 x.}{\underset{\|}{\frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}}} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

□

Proposition: $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ <}} \operatorname{cotan} x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ >}} \operatorname{cotan} x = +\infty$. □



Sixième partie

Fonctions trigonométriques réciproques

Proposition – Définition: L'application $\begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$ est bijective.
On appelle arcsinus la réciproque de cette bijection et on la note Arcsin.

Pour tout $x \in [-1,1]$, $\operatorname{Arcsin} x$ est le seul angle $\boxed{\text{compris entre } -\frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{\pi}{2}}$ donc le sinus vaut x. □

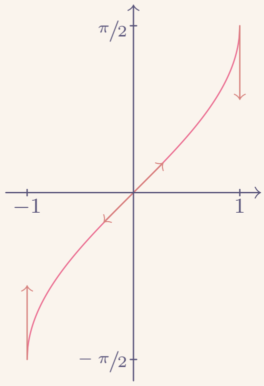
Exemple:
- $\operatorname{Arcsin} 0 = 0$,
- $\operatorname{Arcsin} 1 = \frac{\pi}{2}$,
- $\operatorname{Arcsin}\left(\sin \frac{3\pi}{2}\right) \neq \frac{3\pi}{2}$ car $\operatorname{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}$.
- $\operatorname{Arcsin}\left(\sin \frac{7\pi}{5}\right) = \frac{-2\pi}{5}$ car $\sin \frac{7\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{7\pi}{5}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$ et $-\frac{2\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Proposition:
1. $\forall x \in [-1,1], \operatorname{Arcsin} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
2. $\forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \operatorname{Arcsin}(\sin \theta) = \theta$
3. $\forall x \in [-1,1], \sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$
4. $\forall x \in [-1,1], \cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$

Preuve: 1., 2. et 3. correspondent à la définition de Arcsin.

4. Soit $x \in [-1,1]$. On pose $\theta = \operatorname{Arcsin} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On sait que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ donc $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \sin^2(\operatorname{Arcsin} x) = 1 - x^2$. On en déduit que $|\cos\theta| = \sqrt{1-x^2}$. Comme $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\theta \geqslant 0$ et donc
$$\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}.$$
□

Proposition:
1. Arcsin est impaire
2. Arcsin est continue sur $[-1,1]$
3. Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et
$$\forall x \in]-1,1[, \operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$$
4. Arcsin n'est pas dérivable en 1 et en -1.



Preuve: 1. Soit $x \in [-1,1]$. Alors $-x \in [-1,1]$. On pose $\theta = \operatorname{Arcsin}(-x)$. θ est le seul nombre compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ vérifiant $\sin\theta = -x$.

Arcsin $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $-\operatorname{Arcsin} x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On a

$$\sin(-\operatorname{Arcsin} x) = -\sin(\operatorname{Arcsin} x) = -x$$

donc

$$\theta = \operatorname{Arcsin}(-x) = -\operatorname{Arcsin} x.$$

2. sin est continue et strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$ à valeurs dans $[-1,1]$ donc Arcsin est continue sur $[-1,1]$.
3. Soit $x \in [-1,1]$. $\sin'(\operatorname{Arcsin} x) = \cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$ donc

$$\forall x \in]-1,1[, \sin'(\operatorname{Arcsin} x) \neq 0.$$

Donc Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4. Arcsin est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$, et

$$\forall x \in]-1,1[, \operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow[x\to\pm 1]{} +\infty.$$

D'après le théorème de la limite de la dérivée, Arcsin n'est pas dérivable en ± 1.

□

Remarque:
Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est Arcsin.

Proposition – Définition: L'application $\begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$ est bijective. On note sa réciproque Arccos.

En d'autres termes, pour $x \in [-1,1]$, $\operatorname{Arccos} x$ est le seul angle $\boxed{\text{compris entre } 0 \text{ et } \pi}$ dont le cosinus vaut x.

Preuve:
Théorème de la bijection continue. □

Exemple:
$\mathrm{Arccos}\, 0 = \dfrac{\pi}{2}$, $\mathrm{Arccos}\, \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$, $\mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$,
$\mathrm{Arccos}\left(\cos \dfrac{75\pi}{67}\right) = \dfrac{59\pi}{67} \in [0, \pi]$ car $\cos \dfrac{75\pi}{67} = \cos\left(\dfrac{75\pi}{67} - 2\pi\right) = \cos\left(-\dfrac{59\pi}{67}\right) = \cos \dfrac{59\pi}{67}$.

Proposition:
1. $\forall x \in [-1, 1]$, $\mathrm{Arccos}\, x \in [0, \pi]$,
2. $\forall \theta \in [0, \pi]$, $\mathrm{Arccos}(\cos \theta) = \theta$,
3. $\forall x \in [-1, 1]$, $\cos(\mathrm{Arccos}\, x) = x$,
4. $\forall x \in [-1, 1]$, $\sin(\mathrm{Arccos}\, x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Preuve: 1., 2. et 3. correspondent à la définition de Arccos.
4. Soit $x \in [-1, 1]$.

$$\sin^2(\mathrm{Arccos}\, x) = 1 - \cos^2(\mathrm{Arccos}\, x) = 1 - x^2$$
$$\text{donc } \left|\sin(\mathrm{Arccos}\, x)\right| = \sqrt{1 - x^2}.$$

Or, $\mathrm{Arccos}\, x \in [0, \pi]$ donc $\sin(\mathrm{Arccos}\, x) \geqslant 0$ et donc

$$\sin(\mathrm{Arccos}\, x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

□

Proposition:
1. Arccos est continue sur $[-1, 1]$,
2. Arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$\forall x \in]-1, 1[, \mathrm{Arccos}'\, x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Preuve:
1. cos est coninue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$ à valeurs dans $[-1, 1]$ donc Arccos continue dans $[-1, 1]$.
2.

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, \cos'(\mathrm{Arccos}\, x) &= -\sin(\mathrm{Arccos}\, x) \\ &= -\sqrt{1 - x^2} \neq 0 \end{aligned}$$

donc Arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$\mathrm{Arccos}'\, x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} < 0.$$

□

Corollaire:

$$\forall x \in [-1,1],\ \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$$

Preuve: <u>MÉTHODE 1</u> Soit $f : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x \end{array}$ continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. On a

$$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

donc f est constante sur $]-1,1[$:

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-1,1[, f(x) = C.$$

En particulier,

$$f(0) = \operatorname{Arccos} 0 + \operatorname{Arcsin} 0 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

<u>MÉTHODE 2</u> Soit $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} \sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2} &= \cos(\operatorname{Arcsin} x) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x\right) \end{aligned}$$

donc

$$\operatorname{Arccos} x \equiv \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x \ \ [2\pi] \ \text{ ou } \ \pi - \operatorname{Arccos} x \equiv \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x \ \ [2\pi]$$

donc

$$\begin{aligned} &\exists k \in \mathbb{Z},\ \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou } &\exists k \in \mathbb{Z},\ -\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi. \end{aligned}$$

Or, $\begin{cases} 0 \leqslant \operatorname{Arccos} x \leqslant \pi \\ 0 \leqslant \operatorname{Arcsin} x \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$ donc $0 \leqslant \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x \leqslant \pi$

$\iff \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leqslant -\operatorname{Arccos} x \leqslant 0 \\ 0 \leqslant \operatorname{Arcsin} x \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$ donc $-\frac{\pi}{2} \leqslant -\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x \leqslant \frac{\pi}{2}$

D'où

$$\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2} \ \text{ ou } \ -\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = -\frac{\pi}{2}$$

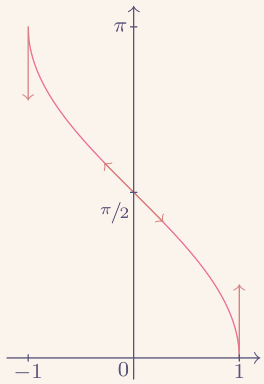
— Si $-\operatorname{Arccos} x > -\frac{\pi}{2}$ ou $\operatorname{Arcsin} x > 0$, alors $-\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x > -\frac{\pi}{2}$ et donc
$$\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}.$$
— Si $-\operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}$ et $\operatorname{Arcsin} x = 0$, alors $x = 0$ et donc
$$\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Soit $x \in [-1,0[$. On pose $y = -x \in [0,1]$
— $\operatorname{Arcsin} x = -\operatorname{Arcsin} y$,
— $\operatorname{Arccos} x = \pi - \operatorname{Arccos} y$: en effet, $\cos(\pi - \operatorname{Arccos} y) = -\cos(\operatorname{Arccos} y) = -y = x$ et $0 \leqslant \operatorname{Arccos} y \leqslant \pi$ donc $-\pi \leqslant \operatorname{Arccos} y \leqslant 0$ et donc $0 \leqslant \pi - \operatorname{Arccos} y \leqslant \pi$

D'où,

$$\begin{aligned}\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x &= \pi - \operatorname{Arccos} y - \operatorname{Arcsin} y \\ &= \pi - (\operatorname{Arccos} y + \operatorname{Arcsin} y) \\ &= \pi - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

□



Proposition – Définition: L'application $\begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x \end{array}$ est bijective. On note Arctan la réciproque de cette bijection.

C'est à dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan} x$ est le seul angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ (exclus) dont la tangente vaut x.

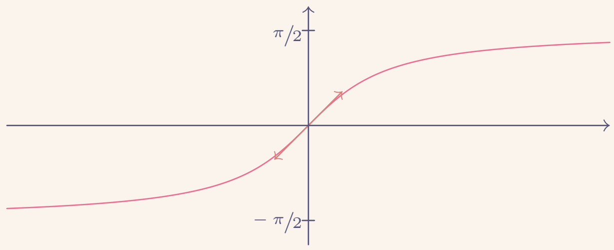
Preuve:
Théorème de la bijection continue. □

Exemple:
$\operatorname{Arctan} 0 = 0$, $\operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{Arctan} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$,
$\operatorname{Arctan}(\tan \frac{9\pi}{7}) = \frac{2\pi}{7} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ car $\tan \frac{9\pi}{7} = \tan\left(\frac{9\pi}{7} - \pi\right) = \tan \frac{2\pi}{7}$.

Proposition:

1. Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{Arctan}' x = \frac{1}{1+x^2},$$
2. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2}, \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{Arctan} x = -\frac{\pi}{2}, \end{cases}$

3. Arctan est impaire.



Preuve: 1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan'(\operatorname{Arctan} x) = 1 + \tan^2(\operatorname{Arctan} x) = 1 + x^2 \neq 0$ donc Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

2. On déduit des limites de tan les limites de Arctan.
3. Comme pour Arcsin.

□

Proposition:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Preuve:

On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \end{array}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \times \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

⚠ $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle !

— $\mathbb{R}_*^+$ est un intervalle donc $\exists C^+ \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_*^+, f(x) = C^+$

— $\mathbb{R}_*^-$ est un intervalle donc $\exists C^- \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_*^-, f(x) = C^-$

$f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ donc $C^+ = \frac{\pi}{2}$,

$f(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$ donc $C^- = -\frac{\pi}{2}$.

□

Septième partie

Trigonométrie hyperbolique

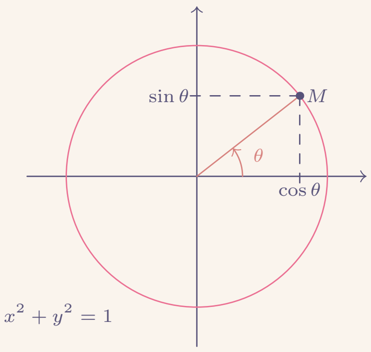
Définition: Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

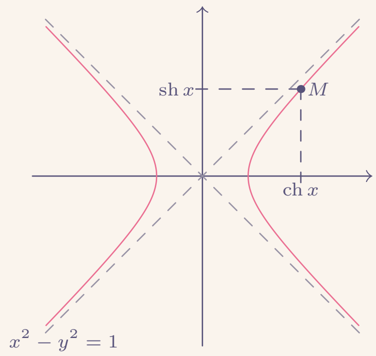
$$\begin{cases} \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}. \end{cases}$$

ch est appelé <u>cosinus hyperbolique</u>, sh est appelé <u>sinus hyperbolique</u> et th est appelé <u>tangeante hyperbolique</u>.

Remarque:
Ces formules rappèlent les formules d'Euler : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} & \longleftrightarrow \quad \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} & \longleftrightarrow \quad \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$





Proposition:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1.$$

Preuve:
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t &= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{\cancel{e^t} + e^{-t} - \cancel{e^t} + e^{-t}}{2} \times \frac{e^t + \cancel{e^{-t}} + e^t - \cancel{e^{-t}}}{2} \\ &= \frac{2e^{-t}}{2} \times \frac{2e^t}{2} \\ &= e^{-t} \times e^t \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\square$

Exercice:
Expliciter $\operatorname{ch}(a+b)$ *avec* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

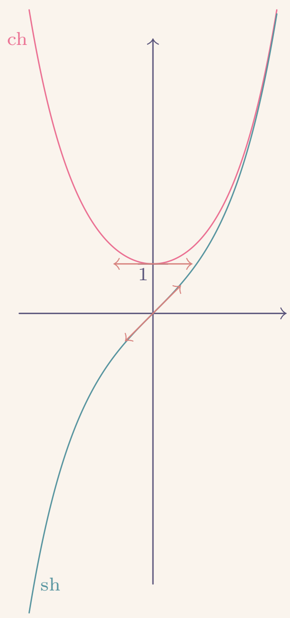
$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) &= \frac{2e^{a+b} + e^{b-a} + e^{a-b}}{4} + \frac{2e^{-(a+b)} - e^{a-b} - e^{b-a}}{4} \\
&= \frac{1}{4}\left(2e^{a+b} + 2e^{-(a+b)}\right) \\
&= \frac{e^{a+b} + e^{-(a+b)}}{2} \\
&= \operatorname{ch}(a+b).
\end{aligned}$$

Expliciter $\operatorname{sh}(a+b)$ *avec* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(b)\operatorname{ch}(a) &= \frac{1}{4}\left(2e^{a+b} + \cancel{e^{a-b}} - \cancel{e^{b-a}} + \cancel{e^{b-a}} - \cancel{e^{a-b}} - 2e^{-(a+b)}\right) \\
&= \frac{e^{a+b} - e^{-(a+b)}}{2} \\
&= \operatorname{sh}(a+b)
\end{aligned}$$

Proposition:

1. ch est paire, sh est impaire ;
2. ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\begin{cases} \operatorname{ch}' = \operatorname{sh}, \\ \operatorname{sh}' = \operatorname{ch}; \end{cases}$
3. sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$;
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$;
5. $\operatorname{ch} x \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}e^x$ et $\operatorname{sh} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}e^x$.



Preuve: 1.

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(-x) = \dfrac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x; \\ \operatorname{sh}(-x) = \dfrac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2} = -\operatorname{sh} x. \end{cases}$$

2. $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc ch et sh aussi. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \operatorname{ch}'(x) = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x); \\ \operatorname{sh}'(x) = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x). \end{cases}$$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} > 0$ donc sh strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x > \operatorname{sh} 0 = 0$ (car sh strictement croissante) et $\operatorname{ch}' 0 = \operatorname{sh} 0 = 0$. Donc, ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

4.et 5.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \operatorname{ch} x = \dfrac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right) = \dfrac{e^{x}}{2}\left(1+e^{-2x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{x}}{2} \longrightarrow +\infty; \\ \operatorname{sh} x = \dfrac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right) = \dfrac{e^{x}}{2}\left(1-e^{-2x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{x}}{2} \longrightarrow +\infty; \end{cases}$$

□

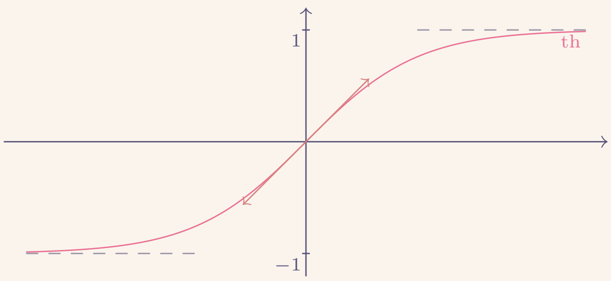
Remarque:
La courbe représentative de ch est appelée “chaînette”.

Proposition: 1. th est imapire ;

2. th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x;$$

3. th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th} x = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{th} x = -1$.



Preuve: 1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\operatorname{th}(-x) = \frac{\operatorname{sh}(-x)}{\operatorname{ch}(-x)} = -\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = -\operatorname{th} x.$$

2. sh et ch sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x \neq 0$ donc th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}' x = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{2} &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \\ &= 1 - \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x.\end{aligned}$$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}' x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} > 0$ donc th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \sim \frac{e^x/2}{e^x/2} = 1 \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

et, comme th est impaire,

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{th} x = - \lim_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = -1.$$

$\square$

Exercice:
Résoudre $\operatorname{sh} x = y$ *d'inconnue* x *et* y *étant un paramètre réel.*

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} x = y &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \\ &\iff (e^x)^2 - 1 = 2ye^x \\ &\iff (e^x - y)^2 - \overbrace{(y^2 + 1)}^{>0} = 0 \\ &\iff \left(e^x - y - \sqrt{y^2+1}\right)\left(e^x - y + \sqrt{y^2+1}\right) \\ &\iff e^x = y + \sqrt{y^2+1} \text{ ou } e^x = y - \sqrt{y^2+1}\end{aligned}$$

Or, $\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)\left(y - \sqrt{1+y^2}\right) = -1 < 0$ donc $y + \sqrt{1+y^2}$ et $y - \sqrt{1+y^2}$ sont de signes opposés.

Comme $y + \sqrt{1+y^2} > y - \sqrt{1+y^2}$, on a $\begin{cases} y + \sqrt{1+y^2} > 0 \\ y - \sqrt{1+y^2} < 0 \end{cases}$ d'où

$$\operatorname{sh} x = y \iff e^x = y + \sqrt{1+y^2} \iff x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right).$$

On a trouvé la réciproque de sh :

$$\begin{aligned}\operatorname{Argsh} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\end{aligned}$$