Chapitre 7

Dévelo

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

Définition: Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f possède un <u>développment limité d'ordre n au voisinage de a</u> s'il existe des réels $(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

En particulier, avec $a = 0$, on a

$$f(x) = \underbrace{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n}_{\text{développement de Taylor}} + \underbrace{\underset{x \to 0}{o}(x^n)}_{\text{reste}}.$$

Théorème (Taylor-Young)**:** Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ (i.e. f définie et dérivable n fois et $f^{(n)}$ est continue) au voisinage de a, alors f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a est

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + \cdots + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

□

Remarque:
Cette formule est à éviter en pratique : il est bien trop difficile de calculer $f^{(n)}$ pour tout n.

Cependant, on peut quand même en déduire le développement limité de exp, cos, sin et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0.

Corollaire:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n),\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n}),\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}),\\
\forall \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots\\
&\quad + \alpha(\alpha-1)\cdots\big(\alpha-(\alpha-1)\big)\frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n).
\end{aligned}$$

Remarque:
Avec $\alpha = -1$, on obtient le développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$ en 0 :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

On en déduit donc le développement limité en 0 de $\dfrac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on obtient le développement limité à l'ordre 2 de $\sqrt{1+x}$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Théorème (primitivation)**:** Soit f une fonction continue en a ayant un développement limité d'ordre n au voisinage de a. Soient $(c_0, c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\big((x-a)^n\big).$$

Soit F une primitive de f. Alors F a un développement limité d'ordre $n+1$ au voisinage de a et

$$F(x) = F(a) = c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + \cdots + c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + \underset{x\to a}{o}\big((x-a)^{n+1}\big).$$

□

Corollaire: En primitivant le développement limité de $\dfrac{1}{x+1}$, on obtient le développement limité de $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1}).$$

On en déduit aussi le développement limité de Arctan :

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}).$$

$\square$