Chapitre 7

Dévelo

Hugo Salou MP2I
Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

Définition: Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f possède un développment limité d'ordre n au voisinage de a s'il existe des réels $(c_0, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \underset{x \to a}{o}\big((x-a)^n\big).$$

En particulier, avec $a = 0$, on a

$$f(x) = \underbrace{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n}_{\text{développement de Taylor}} + \underbrace{\underset{x \to 0}{o}(x^n)}_{\text{reste}}.$$

Théorème (Taylor-Young)**:** Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ (i.e. f définie et dérivable n fois et $f^{(n)}$ est continue) au voisinage de a, alors f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a est

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + \cdots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \underset{x \to a}{o}\big((x-a)^n\big).$$

□

Remarque:
Cette formule est à éviter en pratique : il est bien trop difficile de calculer $f^{(n)}$ pour tout n.

Cependant, on peut quand même en déduire le développement limité de exp, cos, sin et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0.

Corollaire:

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n),\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n}),\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}),\\
\forall \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots\\
&\quad + \alpha(\alpha-1)\cdots\big(\alpha-(\alpha-1)\big)\frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n).
\end{aligned}
$$

Remarque:
Avec $\alpha = -1$, on obtient le développement limité de $\frac{1}{1+x}$ en 0 :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

On en déduit donc le développement limité en 0 de $\frac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Avec $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient le développement limité à l'ordre 2 de $\sqrt{1+x}$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Théorème (primitivation)**:** Soit f une fonction continue en a ayant un développement limité d'ordre n au voisinage de a. Soient $(c_0, c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\big((x-a)^n\big).$$

Soit F une primitive de f. Alors F a un développement limité d'ordre $n+1$ au voisinage de a et

$$F(x) = F(a) = c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + \cdots + c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + \underset{x\to a}{o}\big((x-a)^{n+1}\big).$$

□

Corollaire: En primitivant le développement limité de $\frac{1}{x+1}$, on obtient le développement limité de $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1}).$$

On en déduit aussi le développement limité de Arctan :

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}).$$

$\square$

Exercice (*Calculer $DL_5(0)$ de* $\tan$):

Méthode 1 (quotient) : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

On a

$$\begin{cases} \sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^5), \\ \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5). \end{cases}$$

On calcule d'abord le développement limité de $\dfrac{1}{\cos x}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} \\ &= \frac{1}{1+u} \text{ avec } u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \\ &= 1 - u + u^2 + o(u^2) \\ &= 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) \\ &\quad + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) \\ &\quad + o\left(\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2\right) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^5) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5). \end{aligned}$$

On en déduit le développement limité de $\tan x$:

$$\begin{aligned} \tan x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\right) \\ &= x + \frac{x^3}{2} + \frac{5x^5}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5). \end{aligned}$$

À connaître :

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).}$$

Méthode 2 (déterminer les coefficiants)

On identifie les coefficants :

$$\begin{aligned} \sin x &= (\tan x)(\cos x) \\ &= \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + o(x^5)\right) \\ &\times \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) \\ &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + o(x^5) \\ &- c_0 \frac{x^2}{2} - c_1 \frac{x^3}{2} - c_2 \frac{x^4}{2} - c_3 \frac{x^5}{2} + c_0 \frac{x^4}{24} + c_1 \frac{x^5}{24} \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité,

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 1 \\ c_2 - \dfrac{c_0}{2} = 0 \\ c_3 - \dfrac{c_1}{2} = -\dfrac{1}{6} \\ c_4 - \dfrac{c_2}{2} + \dfrac{c_0}{24} = 0 \\ c_5 - \dfrac{c_3}{2} + \dfrac{c_1}{24} = \dfrac{1}{120} \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} c_0 = c_2 = c_4 = 0 \\ c_1 = 1 \\ c_3 = \dfrac{1}{3} \\ c_5 = \dfrac{2}{15} \end{cases}$$

Méthode 3 (primitivation)
On sait que

$$\frac{\tan x - \tan 0}{x - 0} \xrightarrow[x\to 0]{} \tan'(0) = 1$$

donc $\tan x \sim x$ et donc $\tan x = x + o(x)$.
D'où

$$\begin{aligned} \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) &= 1 + \big(x + o(x)\big)^2 \\ &= 1 + x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

En intégrant, on en déduit que

$$\tan x = \tan 0 + x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Donc,

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= 1 + \tan^2 x \\ &= 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 \\ &= 1 + x^2 + \frac{x^6}{9} + o(x^6) + 2\frac{x^4}{3} + o(x^4) + o(x^6) \\ &= 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

On en déduit donc le développement limité à l'ordre 5 de tan :

$$\tan x = \underbrace{\tan 0}_{\substack{\parallel \\ 0}} + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$