Chapitre 9

Inégalité $\mathbb{R}$

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Deuxième partie

Troisième partie

Quatrième partie

Bornes supérieures

Proposition (borne inférieure)**:** Toute partie minorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Preuve:
Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide minorée. On pose $B = \{-a \mid a \in A\} \neq \varnothing$. Soit m un minorant de A :

$$\forall a \in A,\ m \leqslant a.$$

D'où,

$$\forall a \in A,\ -a \leqslant -m$$

donc B est majorée par $-m$.

D'après la propriété de la borne supérieure, B admet une borne supérieure. On pose $\beta = \sup(B)$, donc β majore B et donc

$$\forall a \in A,\ -a \leqslant \beta$$

et donc

$$\forall a \in A,\ -\beta \geqslant a.$$

Donc $-\beta$ est un minorant de A.

Soit x un minorant de A. Montrons que $x \leqslant -\beta$. On sait que $-x$ majore B et donc $-x \geqslant \beta$. On en déduit que $x \leqslant -\beta$ et donc $-\beta = \inf(A)$. □

Proposition (caractérisation de la borne supérieure)**:** Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide majorée et $M \in \mathbb{R}$.

$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant M, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A, A_0 > M - \varepsilon. \end{cases}$$

Preuve: " $\implies$ " On suppose $M = \sup(A)$. M est un majorant de a :

$$\forall a \in A,\ a \leqslant M.$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme M est le plus petit majorant de A et que $M - \varepsilon < M$, $M - \varepsilon$ ne majore pas A. Donc

$$\exists a_0 \in A,\ a_0 > M - \varepsilon.$$

— On suppose

$$\begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant M; & (1) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A, M - \varepsilon < a_0. & (2) \end{cases}$$

D'après (1), M est un majorant de A. Soit M' un majorant de A. Montrons que $M' \geqslant M$.
On suppose $M' < M$ et on pose $\varepsilon = M - M' > 0$. D'après (2), il existe $a_0 \in A$ tel que

$$a_0 > M - \varepsilon = M' \geqslant a_0$$

une contradiction. Donc $M' \geqslant M$ et donc M est le plus petit majorant de A : $M = \sup(A)$.

□

Proposition (caractérisation de la borne inférieure)**:** Soit $A \subset \mathbb{R}$, non vide minorée et $m \in \mathbb{R}$.

$$m = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A,\ m \leqslant a; \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a_0 \in A,\ a_0 < m + \varepsilon. \end{cases}$$

□

Proposition: Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide majorée et $M \in \mathbb{R}$.

$$M \geqslant \sup(A) \iff \forall a \in A, a \leqslant M.$$

Preuve: " $\Longrightarrow$ " On suppose $M = \sup(A)$. Soit $a \in A$. On sait que $a \leqslant \sup(A)$ car $\sup(A)$ majore A. Donc $a \leqslant M$.

" $\Longleftarrow$ " On suppose $\forall a \in A, a \leqslant M$. Donc M majore A. Or, $\sup(A)$ est le plus petit majorant et donc $M \geqslant \sup(A)$.

□

Proposition: Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide minorée et $m \in \mathbb{R}$.

$$m \leqslant \inf(A) \iff \forall a \in A, m \leqslant a.$$

□

Proposition – Définition: $\mathbb{R}$ est <u>archimédien</u> :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, nx \geqslant y.$$

Preuve:
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$. Supposons

$$(H) : \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ nx < y.$$

On pose $A = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Comme $0 \in A$, $A \neq \varnothing$. D'après (H), A est majorée par y.

Soit $\alpha = \sup(A)$ et $n \in \mathbb{N}$. On sait que $(n+1)x \in A$ donc $(n+1)x \leqslant \alpha$ et donc $nx \geqslant \alpha - x$. On remarque que $\alpha - x$ majore A mais que $\alpha - x < \alpha$: une contradiction car α est le plus petit majorant de A. Donc,

$$\exists n \in \mathbb{N}, nx \geqslant y.$$

□

Théorème: Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes : si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (avec $a < b \in \mathbb{R}$) est continue, alors

$$\exists (\alpha, \beta) \in [a, b]^2,\ \forall x \in [a, b],\ f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta).$$

Preuve:

c.f. Chapitre 14 : Continuité. $\square$

Proposition: Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide majorée. Il existe une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \sup(A)$.

Preuve:
On sait que
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ a > \sup(A) - \varepsilon.$$
Donc,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n \in A, a_n > \sup(A) - \frac{1}{n}.$$
On a
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \in A \text{ et } a_n \leqslant \sup(A).$$
Or
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sup(A) - \frac{1}{n} < a_n \leqslant \sup(A),$$
par encadrement, on en déduit que $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sup(A)$. $\square$

Proposition: Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide minorée. Il existe une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \inf(A)$. $\square$

Cinquième partie

Partie entière

Proposition – Définition: Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \leqslant x < n+1.$$

Cet entier n est appelé partie entière de x et est noté $\lfloor x \rfloor$.

Preuve:
Soit $A = \{p \in \mathbb{Z} \mid p > x\}$. $A \neq \varnothing$ car $\mathbb{R}$ est archimédien.

Soit α la borne inférieure de A. Alors $\alpha \geqslant x$. Montrons que $\alpha \in A$. Soit $n \geqslant 2$. On a $\alpha + \dfrac{1}{n} > \alpha$ donc, il existe $a_n \in A$ tel que

$$\alpha < a_n < \alpha + \frac{1}{n}.$$

On sait que $\dfrac{1}{n} < 1$ donc, il y a au plus un entier dans le segment $\left[\alpha, \alpha + \dfrac{1}{n}\right]$. Donc, tous les a_n sont égaux et $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$. On en déduit que

$$\forall n \geqslant 2,\ a_n = \alpha$$

et donc $\alpha \in A$. Ainsi, $\alpha = \min(A)$ et alors $\alpha - 1 \notin A$. On a donc

$$\alpha - 1 \leqslant x < \alpha$$

et, en posant $n = \alpha - 1$, on en déduit que

$$n \leqslant x < n+1.$$

□

Sixième partie

Densité

Définition: Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ si, pour tout intervalle I ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $A \cap I \neq \varnothing$.

Théorème: $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve:
Soit I un intervalle ouvert non vide. Soient $a < b$ deux éléments de I. On cherche $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que

$$a \leqslant \frac{p}{q} \leqslant b.$$

Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$q(b-a) \geqslant 2 > 1.$$

Donc, l'intervalle $[qa, qb]$ a une longueure supérieure à 1, il contient donc au moins un entier p.

En effet, sinon on a $\lfloor qa \rfloor = \lfloor qb \rfloor$ et alors

$$\begin{cases} \lfloor qa \rfloor \leqslant qb < \lfloor qa \rfloor + 1 \\ \lfloor qa \rfloor \leqslant qa < \lfloor qa \rfloor + 1 \end{cases}$$

et alors

$$-1 < qb - qa < 1$$

une contradiction. On a donc $qa \leqslant p \leqslant qb$ et finalement

$$a \leqslant \frac{p}{q} \leqslant b.$$

$\square$

Théorème: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Il manque une partie du cours ici

Septième partie

Huitième partie

Il manque une partie du cours ici

Preuve:
Soit $a \in I$ et

$$\begin{aligned}\tau_a : I \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.\end{aligned}$$

D'après le lemme des pentes, τ_a est croissante. En effet, soient $x, y \in I \setminus \{a\}$ tels que $x < y$.

Cas 1 $a < x < y$. On a alors

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$$

et donc $\tau_a(x) \leqslant \tau_a(y)$.

Cas 2 $x < a < y$. On a alors

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$$

et donc $\tau_a(x) \leqslant \tau_a(y)$.

Cas 3 $x < y < a$. On a alors

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$$

et donc $\tau_a(x) \leqslant \tau_a(y)$.

Soit $x > a$ avec $x \in I$. On fixe $z_0 < a$ un élément de I. z_0 existe car I est ouvert. On a alors... □

Il manque une partie du cours ici

VIII

La suite du cours provient d'Aubin. Je ne suis pas responsable pour les éventuelles bêtises qu'il a pu taper.

Neuvième partie

Propriétés de $(\mathbb{R}, \leq)$

Axiome (Propriétés de $(\mathbb{R}, \leq)$)**:** $\mathbb{R}$ est muni d'une addition notée $+$ associative, commutative, d'élément neutre 0 et tout réel x a un symétrique pour $+$ noté $-x$
$\mathbb{R}$ est muni d'une multiplication notée $\times$, associative, commutative, d'élément neutre 1 et tout réel x a un symétrique pour $\times$ noté x^{-1} ou $\frac{1}{x}$ (on la notera $*$ dans ce document)
La multiplication est distributive sur l'addition
$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a(b + c) = ab + ac$

$\leq$ est un ordre total sur $\mathbb{R}$
$\forall (x, y, a) \in \mathbb{R}^3, (x \leq y \Longrightarrow a + x \leq a + y)$
$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Longrightarrow ax \leq ay$

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
Propriété de la borne supérieure : Tout partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure

Lemme (Opposé d'un réel)**:** $\forall a \in \mathbb{R}, -a = -1 * a$

Proposition (Inverse de $\leq$)**:** Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
$x \leq y \Longrightarrow -y \leq -x$

Preuve:
$x \leq y \Longrightarrow -x + x \leq -x + y$
$\Longrightarrow 0 \leq -x + y$
$\Longrightarrow -y \leq -x$

$\square$

Corollaire ($\times$ et $\leq$)**:** $\forall a \in \mathbb{R}_-^*, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Longrightarrow ay \leq ax$

Preuve:
Soient $a < 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2$

On pose $b = -a$
$a < 0 \Longrightarrow -0 \leq -a \Longrightarrow 0 \leq b$

Si $b = 0, a = 0$
$x \leq y \Longrightarrow bx \leq by$
$\Longrightarrow -by \leq -bx$
$\Longrightarrow -1(by) \leq -1(bx)$
$\Longrightarrow (-1 * b) * y \leq (-1 * b) * x$
$\Longrightarrow -by \leq -bx$
$\Longrightarrow ay \leq ax$

$\square$

Proposition (Elément Symétrique pour la Multiplication): Soit $a \in \mathbb{R}$, $-a$ est le seul réel qui vérifie $a + (-a) = 0$

Preuve:
$a + (-a) = a + (-1) * a$
$= a * (1 + -1)$
$= a * 0 = 0$

On a bien $a * 0 = 0$ car :
$a * 0 = a * (0 + 0)$
$0 + 0 = (a * 0) + (a * 0) = 0$

$\square$

Proposition ($+$ et $\leq$): Soient $(a, b, x, y) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\begin{cases} x \leq y \\ a \leq b \end{cases}$
Alors $a + x \leq b + y$

Preuve:
$a \leq b \Longrightarrow a + x \leq b + x$
$x \leq y \Longrightarrow b + x \leq b + y$
$\leq$ est transitive donc $a + x \leq b + y$

$\square$

Remarque (Soustraire des Inégalités):
On ne peut pas soustraire directement des inégalités

Si $\begin{cases} x \leq y \\ a \leq b \end{cases}$, alors $\begin{cases} x \leq y \\ -b \leq -a \end{cases}$

et alors, $x - b \leq y - a$

Proposition ($\times$ et $\leq$ dans $\mathbb{R}^4$): Soient $(x, y, a, b) \in (\mathbb{R}^+)^4$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq a \leq b \end{cases} \Longrightarrow xa \leq yb$$

Preuve:
$\begin{cases} x \leq y \\ 0 \leq a \end{cases} \Longrightarrow ax \leq ay$ et $\begin{cases} a \leq b \\ 0 \leq y \end{cases} \Longrightarrow ay \leq bx$

$\square$

Proposition (Inégalité des Inverses)**:** $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_*^+)^2, x \leq y \Longrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$

Preuve:
Soient $(x,y) \in (R_*^+)^2$
On suppose $x \leq y$

Si $\frac{1}{x} \leq 0$, alors $x\frac{1}{x} \leq 0 * x$, alors $1 \leq 0$

Donc $\frac{1}{x} \geqslant 0$ donc $\frac{1}{x}x \leq \frac{1}{x}y$

Donc $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$

$\square$

Remarque (Diviser des Inégalités):
On ne peut pas diviser des inégalités

Dixième partie

Inégalités Classiques

Proposition (Inégalité Triangulaire dans $\mathbb{R}$): $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} |x+y| \leq |x| + |y| \\ |x| - |y| \leq |x-y| \end{cases}$

En changeant y en $-y$, on a aussi

$\begin{cases} |x-y| \leq |x| + |y| \\ |x| - |y| \leq |x+y| \end{cases}$

Preuve:
1 - Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
$|x| = \max(-x, x) \geq x$
$|y| \geq y$

Donc $x + y \leq |x+y|$

Si $x + y \leq 0$, alors $|x+y| \leq |x| + |y|$

On a aussi $|x| \geq -x$ et $|y| \geq -y$
Donc $-(x+y) \leq |x| + |y|$

Si $x + y \leqslant 0$, alors $|x| + |y| \geq |x+y|$

2 - Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$|x| = |x - y + y| \leq |x-y| + |y|$
Donc $|x| - |y| \leq |x+y|$

Si $|x| - |y| \geq 0, |x| - |y| \leq |x-y|$

On a aussi $|y| = |y - x + x| \leq |y-x| + |x|$
Donc $|y| - |x| \leq |y-x|$

Si $|x| - |y| \leqslant 0, |x| - |y| \leq |x-y|$

□

Proposition (Inégalité Triangulaire dans $\mathbb{C}$): $\forall (x,y) \in \mathbb{C}, \begin{cases} |x+y| \leq |x| + |y| \\ |x| - |y| \leq |x-y| \end{cases}$

Preuve:
$|x+y| \leq |x| + |y| \iff |x+y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$
$\iff (x+y)(\overline{x} + \overline{y}) \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|xy|$
$\iff |x|^2 + |y|^2 + (x\overline{y} + \overline{x}y) \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|xy|$
$\iff 2\mathfrak{Re}(xy) \leq 2|xy|$

Or, pour tout $z \in \mathbb{C}, \mathfrak{Re}(e) \leq |z|$
En effet :

$|z| = \sqrt{\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2} \geqslant \sqrt{\mathfrak{Re}(z)^2} = |\mathfrak{Re}(z)| \geqslant \mathfrak{Re}(z)$

□

Proposition (Inégalité Triangulaire à n Coefficients)**:** Soient $(z_1...z_n) \in \mathbb{C}^n$
Alors, $|\sum_{k=1}^{n}|z_k \leq \sum_{k=1}^{n}|z_k|$

Preuve:
Pour $n \in \mathbb{N}^*, P(n)$:"$\forall(z_1...z_n) \in \mathbb{C}^n, |\sum_{k=1}^{n}|z_k \leq \sum_{k=1}^{n}|z_k|$"

$P(1)$ et $P(2)$ sont vraies

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $P(n)$ vraie
Soient $(z_1...z_n + 1) \in \mathbb{C}^n + 1$
$|\sum_{k=1}^{n+1}|z_k = |\sum_{k=1}^{n} z_k + z_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n}|z_k| + |z_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1}|z_k|$

Donc $P(n+1)$ vraie
Par récurrence, $\forall n \in N^*, P(n)$ vraie

□

Proposition (Inégalité Triangulaire des Intégrales)**:** Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue
Alors $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Preuve:
$\forall x \in [a, b], -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

□

Proposition (Inégalité Triangulaire des Intégrales sur $\mathbb{C}$)**:** Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue
Alors $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Preuve:
Cas 1 : $|\int_a^b f(x)dx| = 0$

On a $\forall x \in [a,b], |f(x)| \geqslant 0$
donc $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx \geqslant 0 = |\int_a^b f(x)dx|$

Cas 2 : $\displaystyle|\int_a^b f(x)dx| \neq 0$

On pose $\displaystyle r = |\int_a^b f(x)dx| \in \mathbb{R}_+^*$

Soit θ un argument de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

D'où $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = re^{i\theta}$

$\displaystyle r = e^{-i\theta}\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)e^{-i\theta}dx$
$\displaystyle = \mathfrak{Re}(\int_a^b f(x)e^{-i\theta}dx)$
$\displaystyle = \int_a^b \mathfrak{Re}(f(x)e^{-i\theta})dx \leq \int_a^b |f(x)e^{-i\theta}|dx$
car $\forall x, \mathfrak{Re}(f(x)e^{-i\theta}) \leq |f(x)e^{-i\theta}|$
$\displaystyle \leq \int_a^b |f(x)||e^{-i\theta}|dx = \int_a^b |f(x)|dx$

□

Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwartz): Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues

$$(\int_a^b f(t)g(t)dt)^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(x)dt$$

Proposition (Inégalité des Accroissements Finis sur $\mathbb{R}$): Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ vérifiant
$\forall t \in I, |f'(t)| \leq M$

Alors $\forall (a,b) \in I^2, |f(a) - f(b)| \leq M|a-b|$

Proposition (Inégalité des Accroissements Finis sur $\mathbb{C}$): Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 et M tel que
$\forall t \in I, |f'(t)| \leq M$

Alors $\forall (a,b) \in I^2, |f(a) - f(b)| \leq M|a-b|$

Preuve:
On suppose $a \leq b$

$|f(a) - f(b)| = |f(b) - f(a)| = |\int_a^b f'(t)dt|$

$\leq \int_a^b |f'(t)|dt$

$\leq \int_a^b Mdt = M(b-a) = M|b-a|$

$\square$

Onzième partie

Valeur Absolue

Proposition (Inégalités avec la Valeur Absolue)**:** Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
$|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$
$|a| \geqslant b \iff a \geqslant b$ ou $a \leq -b$

Proposition (Partie Bornée et Valeur Absolue)**:** Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$
A est bornée $\iff \exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, |a| \leq M$

Preuve:
"$\Longleftarrow$" :
On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall a \in A, |a| \leq M$

Donc $\forall a \in A, -M \leq a \leq M$
Donc A est majorée par M et minorée par $-M$
Donc A est bornée

"$\Longrightarrow$" :
On suppose A bornée

Soit M un majorant de A et m un minorant de A
On pose $\alpha = \max(M, -m)$
$\alpha \geqslant M$ et $\forall a \in A, a \leq \alpha$

On a aussi $\alpha \geqslant m$ donc $-a \leq -m$
donc $-m$ est un majorant

$\forall a \in A, -\alpha \leq a \leq \alpha$
donc $\forall a \in A, |a| \leq \alpha$

$\square$

Douzième partie

Bornes Inférieure / Supérieure

Proposition (Existence de la Borne Inférieure)**:** Toute partie minorée, non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure

Preuve:
Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ non vide et minorée
Soit $B = -a | a \in A \neq \varnothing$
Soit m un minorant de A

$\forall a \in A, m \leq a$
donc $\forall a \in A, -a \geqslant -m$
donc B est majoré par m

D'après la propriété de la borne supérieure, B admet une borne supérieure
On suppose $\beta = \sup(B)$

β majore B donc $\forall a \in A, -a \leq \beta$
donc $\forall a \in A, -\beta \leq a$
donc $-\beta$ est un majorant de A

Soit x un minorant de A
Montrons que $x \leq -\beta$
$-x$ majore B donc $-x \geqslant \beta$ donc $x \leq -\beta$

Donc $-\beta = \inf(A)$

□

Proposition (Caractérisation de la Borne Supérieure)**:** Soient $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ non vide majorée et $M \in \mathbb{R}$

$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \leq M \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A, a_0 > M - \varepsilon \end{cases}$$

Preuve:
"$\Longrightarrow$" : On suppose $M = \sup(A)$

M est un majorant de A donc $\forall a \in A, a \leq M$
et c'est le plus petit majorant

Soit $\varepsilon > 0$
$M - \varepsilon > M$ donc $M - \varepsilon$ ne majore pas A
$\exists a_0 \in A, a_0 > M - \varepsilon$

"$\Longleftarrow$" : On suppose $\begin{cases} \forall a \in A, a \leq M & 1 \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A, a_0 > M - \varepsilon & 2 \end{cases}$

D'après 1, M est un majorant de A
Soit M' un majorant de A, montrons $M' \geqslant M$
On suppose $M' \leq M$, on pose $\varepsilon = M - M' \geqslant 0$

D'après 2, il existe $a_0 \in A$ tel que
$a_0 > M - \varepsilon = M' \geqslant a_0$ contradiction

Donc $M' \geqslant M$
Donc M est le plus petit majorant de A
Donc $M = \sup(A)$

□

Proposition (Caractérisation de la Borne Inférieure)**:** Soient $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ non vide minorée et $M \in \mathbb{R}$

$$M = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A, a > M \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A, a_0 < M + \varepsilon \end{cases}$$

Proposition (Inégalité et Borne Supérieure)**:** Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ non vide majorée et $M \in \mathbb{R}$

$M \geqslant \sup(A) \iff \forall a \in A, M \geqslant a$

Preuve:
"$\Longrightarrow$" : On suppose $M \geqslant \sup(A)$
Soit $a \in A$, on sait que $a \leq \sup(A)$ car $\sup(A)$ majore A
Donc $a \leq M$

"$\Longleftarrow$" : On suppose $\forall a \in A, a \leq M$
Donc M majore A
Or, $\sup(A)$ est le plus petit majorant de A donc $M \geqslant \sup(A)$

□

Proposition (Inégalité et Borne Inférieure)**:** Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ non vide minorée et $m \in \mathbb{R}$

$m \leq \inf(A) \iff \forall a \in A, a > m$

Proposition ($\mathbb{R}$ est archimédien)**:** $\mathbb{R}$ est archimédien :
$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, nx \geqslant y$

Preuve:
Soient $(x, y) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$
Supposons $(H) : \forall n \in \mathbb{N}, nx \leq y$

On pose $A = \{nx | n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$
$A \neq \varnothing$ car $0 \in A$
D'après (H), A est majoré par y

Soit $\alpha = \sup(A)$

Soit $n \in \mathbb{N}$
$(n+1)x \in A$ donc $(n+1)x \leq \alpha$
donc $nx \leq \alpha$

Donc $\begin{cases} \alpha - x \geqslant nx \\ \alpha - x < \alpha \end{cases}$ Contradiction avec le fait que α soit le plus petit majorant de A

Donc $\exists n \in \mathbb{N}, nx \geqslant y$

□

Proposition (Théorème des Valeurs Extrêmes)**:** Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors
$\exists(\alpha, \beta) \in [a, b]^2, \forall x \in [a, b], \quad f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$

Preuve:
Voir Chapitre 12 : Suites

□

Proposition (Limite de Suite et Borne Supérieure)**:** Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ non vide majorée
Il existe une suite $(a_n) \subset A$ telle que
$\lim a_n = \sup(A)$

Preuve:
On sait que $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a > \sup(A) - \varepsilon$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n > sup(A) - \dfrac{1}{n}$
$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in A$ donc $a_n < \sup(A)$
$\forall a \in \mathbb{N}^*, \sup(A) - \dfrac{1}{n} < a_n < \sup(A)$

Par encadrement, $a_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \sup(A)$

□

Proposition (Limite de Suite et Borne Inférieure)**:** Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ non vide minorée
Il existe une suite $(a_n) \subset A$ telle que
$\lim a_n = \inf(A)$

Treizième partie

Partie Entière

Proposition (Définition): Soit $x \in \mathbb{R}$
$\exists ! n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n+1$
Cet entier est appelé partie entière de x et noté $\lfloor x \rfloor$

Preuve:
Soit $A = \{p \in \mathbb{Z} | p > x\}$
$A \neq \varnothing$ car $\mathbb{R}$ est archimédien
A est minoré par x

Soit α la borne inférieure de A, alors $\alpha \geqslant x$
Montrons que $\alpha \in \mathbb{Z}$

Soit $n \geqslant 2, \alpha + \frac{1}{n} \geqslant \alpha$
donc $\exists a_n \in A, \alpha \leq a_n \leq \alpha + \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n} < 1$ car la distance entre deux entiers est $\geqslant 1$
Il y a au plus 1 entier dans $[\alpha, \alpha + \frac{1}{n}]$

Donc tous les a_n sont égaux et $a_n \longrightarrow \alpha$ donc $\forall n \geqslant 2, a_n = \alpha$
donc $\alpha \in A$, donc $\alpha = \min(A)$, alors $\alpha - 1 \notin A$
donc $\alpha - 1 \leq x \leq a$
On pose $n = \alpha - 1$

□

Quatorzième partie

Densité

Définition (Densité)**:** Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$
On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ si :
Pour tout intervalle I ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $A \cap I \neq \varnothing$

Théorème (Densité de $\mathbb{Q}$)**:** $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Preuve:
Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$
Soient $a < b$ deux éléments de I

On cherche $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $a < \dfrac{p}{q} < b$

Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, $\exists q \in \mathbb{N}^*, q(b-a) \geqslant 2 > 1$
Donc l'intervalle $[qa, qb]$ a une longueur supérieure à 1
Il contient donc au moins 1 entier p

En effet, sinon on a $\lfloor qa \rfloor = \lfloor qb \rfloor$ et alors
$$\begin{cases} \lfloor qa \rfloor \leq qb \leq \lfloor qa \rfloor + 1 \\ \lfloor qa \rfloor \leq qa \leq \lfloor qa \rfloor + 1 \end{cases}$$
et alors $-1 < qb - qa < 1$ contradiction

On a donc $qa \leq p \leq qb$
et finalement $a \leq \dfrac{p}{q} \leq b$

$\square$

Théorème (Densité de $\mathbb{R}\mathbb{Q}$)**:** $\mathbb{R}\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Preuve:
Soit I un intervalle ouvert non vide de R

On pose $J = \{x - \sqrt{2} | x \in I\}$, J est ouvert et non vide
$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc $J \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$

Soit $r \in J \cap \mathbb{Q}$, alors $r + \sqrt{2} \in I$
Soit $s \in Q = r + \sqrt{2}$, alors $\sqrt{2} = s - r \in \mathbb{Q}$
ce qui n'est pas le cas
Ainsi, $r + \sqrt{2} \in I \cap (\mathbb{R}\mathbb{Q})$

$\square$

Remarque (Suite de Rationnels):
Soit $x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n =]x - \dfrac{1}{n}, x + \dfrac{1}{n}[$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit $r_n \in Q \cap I$

On a défini une suite de rationnels (r_n)
$\forall n \in \mathbb{N}^*, x - \frac{1}{n} \leq r_n \leq x + \frac{1}{n}$
Par encadrement, $r_n \longrightarrow x$

Proposition (Approximation par Défaut et par Excès)**:** Soit $x \in \mathbb{R}$
Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leq x < \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} + \frac{1}{10^n}$

On démontrera que $\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} x$

Preuve:
$\forall n \in \mathbb{N}, \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1$

□

Corollaire (Densité de D)**:** Soit D l'ensemble des nombres décimaux
$D = \{\frac{p}{10^n} | p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
D est dense dans $\mathbb{R}$

Quinzième partie

Intervalles

Définition (Intervalle de $\mathbb{R}$)**:** Un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ d'une de ces formes :
$\{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}, (a,b) \in \mathbb{R}^2$
$\{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
$\{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}, a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R}$
$\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}, a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Définition (Partie Convexe)**:** Soit D une partie de $\mathbb{R}$
On dit que D est convexe si $\forall (x,y) \in D^2, x \leq y \Longrightarrow [x,y] \in D$

Théorème (Intervalle et Convexité)**:** Soit $D \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$
D est un intervalle $\iff$ D est convexe

Preuve:
"$\Longrightarrow$" : On suppose que D est un intervalle

Cas 1 : On suppose $D = [a,b]$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a \leq b$
Soient $(x,y) \in D^2$ avec $x \leq y$
Soit $z \in [x,y]$
On a donc $a \leq x \leq z \leq y \leq b$ donc $z \in [a,b]$
Donc D est convexe

Cas 2 : On suppose $D = [a,b[$ avec $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $a < b$
Soient $(x,y) \in D^2$ avec $x \leq y$
Soit $z \in [x,y]$
On a donc $a \leq x \leq z \leq y < b$ donc $z \in [a,b]$
Donc D est convexe

Les deux autres cas se traitent de la même façon

"$\Longleftarrow$" : On suppose que D est convexe et non vide

On pose $M = \begin{cases} \sup(D) \text{ si } D \text{ est majorée} \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$ et $m = \begin{cases} \inf(D) \text{ si } D \text{ est minorée} \\ -\infty \text{ sinon} \end{cases}$

Montrons que
$]m,M[\subset D \subset [m,M]$ si $(m,M) \in \mathbb{R}^2$
$]m,M[\subset D \subset [m,M[$ si $m \in \mathbb{R}, M = +\infty$
$]m,M[\subset D \subset]m,M]$ si $m = -\infty, M \in \mathbb{R}$
$]m,M[\subset D \subset]m,M[$ si $m = -\infty, M = +\infty$

Soit $z \in]m,M[$
Si $M \in \mathbb{R}$, z ne majore pas D car $z \leq M$
Si $M = +\infty$, D n'est pas majorée donc z n'est pas un majorant
Donc $\exists y \in D, y \geqslant z$

Si $m \in \mathbb{R}$, z ne minore pas D car $m \leq z$
Si $m = -\infty$, D n'est pas minorée donc z n'est pas un minorant

Donc $\exists x \in D, x \leq z$

Donc $z \in [x, y] \subset D$ car $\left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in D^2 \\ D \text{ convexe} \end{array} \right.$

Donc $z \in D$, on a bien $]m, M[\subset D$

Cas 1 : On suppose $(m, M) \in \mathbb{R}^2$

Soit $z \in D$, $\left\{ \begin{array}{l} m \text{ minore } D \text{ donc } m \leq z \\ M \text{ majore } D \text{ donc } z \leq M \end{array} \right.$ donc $z \in [m, M]$

Donc $D \in \{]m, M[,\ [m, M[,\ ]m, M],\ [m, M]\}$
Donc D est un intervalle

Cas 2 : On suppose $m \in \mathbb{R}, M = +\infty$

Soit $z \in D$, $\left\{ \begin{array}{l} m \text{ minore } D \text{ donc } m \leq z \\ M = +\infty \end{array} \right.$ donc $z \in [m, +\infty[$

Donc $D \in \{]m, M[,\ [m, M[\}$
Donc D est un intervalle

Cas 3 : On suppose $m = -\infty, M \in \mathbb{R}$

Soit $z \in D$, $\left\{ \begin{array}{l} m = -\infty \\ M \text{ majore } D \text{ donc } z \leq M \end{array} \right.$ donc $z \in]-\infty, M]$

Donc $D \in \{]m, M[,\ ]m, M]\}$
Donc D est un intervalle

Cas 4 : On suppose $m = -\infty, M = +\infty$

Soit $z \in \mathbb{R}$ donc $z \in]-\infty, +\infty[$

$D = \mathbb{R}$ donc D est un intervalle

$\square$

Proposition (Bornes, Min et Max)**:** Soient $a, b \in \mathbb{R}$

$\inf([a, b]) = \min([a, b]) = a$
$\sup([a, b]) = \max([a, b]) = b$

$\inf(]a, b[) = a$
$\sup(]a, b[) = b$

$\inf([a, b[) = \min([a, b[) = a$
$\sup([a, b[) = b$

$\inf(]a, b]) = a$
$\sup(]a, b]) = \max(]a, b]) = b$

Proposition (Intersection d'Intervalles)**:** Un intersection quelconque d'intervalles est convexe

Preuve:
Soit $(I_a)_{a\in A}$ une famille d'intervalles et $I = \bigcap_{a\in A} I_a$

Montrons que I est un intervalle
Montrons que I est convexe

Soit $(x, y) \in I^2, x \leq y$, montrons $[x, y] \subset I$

Soit $z \in [x, y]$
Soit $a \in A$

$x \in I$ donc $x \in I_a$
$y \in I$ donc $y \in I_a$

I_a est convexe
Donc $z \in I_a$

□

Remarque (Réunion d'Intervalles):
Un réunion d'intervalles n'est pas nécessairement un intervalle

Seizième partie

Fonction Convexes

Définition (Fonction Convexe)**:** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec I un intervalle
On dit que f est convexe si
$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$

Proposition (Expression d'un Elément d'un Intervalle selon les Bornes)**:** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$
Soit $x \in \mathbb{R}$
$x \in [a,b] \iff \exists \lambda \in [0,1], x = (1-\lambda)a + \lambda b$

Preuve:
$x \in [a,b] \iff a \leq x \leq b$
$\iff 0 \leq x - a \leq b - a$
$\iff 0 \leq \dfrac{x-a}{b-a} \leq 1$
$\iff \exists \lambda \in [0,1], \lambda = \dfrac{x-a}{b-a}$
$\iff \exists \lambda \in [0,1], x = \lambda(b-a) + a$
$\iff \exists \lambda \in [0,1], x = \lambda b - \lambda a + a$
$\iff \exists \lambda \in [0,1], x = (1-\lambda)a + \lambda b$

□

Proposition (Inégalité de Jansen)**:** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe
et $(x_1 ... x_n) \in I^n, (\lambda_1 ... \lambda_n) \in [0,1]^n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et $n \geqslant 2$

Alors $f(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$

Preuve:
Soit $n \geqslant 2$
$\forall (x_1 ... x_n) \in I^n, (\lambda_1 ... \lambda_n) \in [0,1]^n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

On a $f(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$

Soient $(x_1 ... x_{n+1}) \in I^{n+1}, (\lambda_1 ... \lambda_{n+1}) \in [0,1]^{n+1}$
On suppose $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$
On suppose $\lambda_{n+1} \neq 1$

On pose $\begin{cases} \lambda = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 - \lambda_{n+1} \neq 0 \\ x = \dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i \in I \end{cases}$

Ainsi, $f(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i) = f(\lambda_{n+1}x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i)$
$= f((1-\lambda)x_{n+1} + \lambda x) \leq (1-\lambda)f(x_{n+1}) + \lambda f(x)$

De plus, $f(x) = f(\sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i)$ avec $\forall i \in [\![1,n]\!], \mu_i = \dfrac{\lambda_i}{\lambda}$
$\sum_{i=1}^{n}\mu_i = \sum_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_i}{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda} + \lambda = 1$

D'après l'hypothèse de récurrence,
$f(x \leq \sum_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_i}{\lambda}f(x_i))$
D'où
$f(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i) = \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$

Montrons que $x \in I$
On pose $\begin{cases} \alpha = \min\{x_i | i \in [\![1,n]\!]\} \in I \\ \beta = \max\{x_i | i \in [\![1,n]\!]\} \in I \end{cases}$

$\forall i \in [\![1,n]\!], \alpha \leq x_i \leq \beta$
donc $\forall i \in [\![1,n]\!], \dfrac{\lambda_i}{\lambda}\alpha \leq \dfrac{\lambda_i}{\lambda}x_i \leq \dfrac{\lambda_i}{\lambda}\beta$
donc $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\lambda_i}{\lambda}\alpha \leq \sum_{k=1}^{n}\dfrac{\lambda_i}{\lambda}x_i\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\lambda_i}{\lambda}\beta$
donc $\alpha \leq x \leq \beta$

Donc, par convexité de I,
On suppose $\lambda_{n+1} = 1$, alors $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 0$

Or, $\forall i \in [\![1,n]\!], \lambda_i \geqslant 0$
Donc $\forall i \in [\![1,n]\!], \lambda_i = 0$
$f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i) = f(x_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i f(x_i) = f(x_{n+1})$

$\square$

Proposition (Lemme des Pentes)**:** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe
Soient $x_1 < x_2 < x_3 \in I^3$
Alors $\dfrac{f(x1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \dfrac{f(x1) - f(x_3)}{x_1 - x_3} \leq \dfrac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}$

Preuve:
Soit $\lambda \in]0,1[$ tel que $x_2 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3$
$f(x_2) - f(x_1) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3) - f(x_1)$
$\leq \lambda(f(x_3) - f(x_1))$
$x_2 - x_1 = \lambda(x_3 - x_1) > 0$

D'où $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \dfrac{\lambda(f(x_3) - f(x_1))}{\lambda(x_3 - x_1)} \leq \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$

$f(x_2) - f(x_3) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3) - f(x_3)$
$\leq (1-\lambda)(f(x_1) - f(x_3))$

$x_2 - x_3 = (1-\lambda)(x_1 - x_3) < 0$
$\dfrac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} \geq \dfrac{(1-\lambda)(f(x1) - f(x_3))}{(1-\lambda)(x_1 - x_3)} \geq \dfrac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3}$

□

Proposition (Réciproque du Lemme des Pentes)**:** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

Si, $\forall x_1 < x_2 < x_3 \in I^3$, $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \dfrac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3}$
Alors f est convexe

Preuve:
Soient $x \leq y \in I^2$
Soient $\lambda \in]0,1[$ et $z = (1-\lambda)x + \lambda y$

Montrons que $f(z) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$
On pose $\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = z \\ x_3 = y \end{cases}$ Ainsi, $x_1 < x_2 < x_3$
Donc $\dfrac{f(x) - f(z)}{x - z} \leq \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ $(*)$ et $\lambda = \dfrac{z - x}{y - x}$

$(*) \implies \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$
$\implies f(z) - f(x) \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}(z - x)$
$\implies f(z) \leq \lambda(f(y) - f(x)) + f(x) = \lambda f(y) + (1-\lambda)f(x)$

□

Remarque (Autres Preuves Possible):
Si on remplace $(*)$ par $\dfrac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3} \leq \dfrac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}$ ou par $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \dfrac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}$
On peut aussi conclure que f est convexe

Proposition (Théorème Convexité / Dérivabilité)**:** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe sur I ouvert
Alors f est dérivable à gauche et) droite en tout point de I et
$\forall x \in I, f'_{gauche}(x) \leq f'_{droite}(x)$

Preuve:
Soit $a \in I$ et $\tau_a : I\{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

D'après le Lemme des Pentes, τ_a est croissante
En effet, soient $(x, y) \in (I\{a\})^2$ et $x < y$

Cas 1 : $a < x < y$
On a alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \dfrac{f(y) - f(a)}{y - a}$
Donc $\tau_a(x) \leq \tau_a(y)$

Cas 2 : $x \leq a \leq y$
On a alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \dfrac{f(y) - f(a)}{y - a}$
Donc $\tau_a(x) \leq \tau_a(y)$

Cas 3 : $x \leq y \leq a$
On a alors $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \dfrac{f(y) - f(a)}{y - a}$
Donc $\tau_a(x) \leq \tau_a(y)$

Donc $\tau_a(x) \leq \tau_a(x)$

Soit $x > a$ avec $x \in I$
On fixe $z_0 < a$ avec $z_0 \in I$

Alors $\tau_a(x) \geqslant \tau_a(z_0)$
τ_a est minorée sur $I \cap]a, +\infty[$ et croissante
Donc τ_a a une limite finie quand x tend vers a par valeur supérieure
Donc f est dérivable à droite et $f'_{droite}(a) \geqslant \tau_a(z_0)$

Soit $z_1 > a$ fixé
$\forall x \in I \cap]-\infty, a[, \tau_a(x) \leq \tau_a(z_1)$
Donc τ_a est majorée sur $I \cap]-\infty, a[$
Donc τ_a a une limite finie que x tend vers a par valeur inférieure
Donc f est dérivable à gauche et $f'_{gauche}(a) \leq \tau_a(z_1)$

De plus, $\forall x \in I \cap]-\infty, a[,\ \forall y \in]a, +\infty[,\ \tau_a(x) \leq \tau_a(y)$

Donc, si on fait tendre x vers a par valeur inférieure :
$\forall y \in I \cap]a, +\infty[, f'_{gauche}(a) \leq \tau_a(y)$
Si on fait tendre y par valeur supérieure :
$f'_{gauche}(x) \leq f'_{droite}(x)$

□

Corollaire: Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe où I est ouvert
Alors f est continue sur I

Preuve:
Soit $a \in I$

$\forall x \in I \cap]-\infty, a[, \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_g(a) + \underset{\substack{x \to a \\ <}}{o}(1)$

Donc $f(x) = f(a) + f'_g(a)(x-a) + \underset{\substack{x \to a \\ <}}{o}(x-a)$

Donc $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ <}}{\longrightarrow} f(a)$

De même, $\forall x \in I \cap]a, +\infty[, f(x) = f(a) + f'_d(a) + \underset{\substack{x \to a \\ >}}{o}(x-a)$

Donc $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ >}}{\longrightarrow} f(a)$

Donc f est continue en a

□

Proposition (Théorème Convexité / Croissance Dérivée)**:** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable
f est dérivable $\iff$ f' est croissance

Preuve:
"$\Longrightarrow$" : On suppose que I a au moins 2 éléments distincts, sinon le résultat est trivial
On suppose f convexe

Soient $(x, y) \in I^2$, on suppose $x < y$
Soit $u \in]x, y[$
Soit $\tau_x : u \longmapsto \dfrac{f(u)-f(x)}{u-x}$

Comme τ_x est croissante sur $I\{x\}, f'(x) \leq \tau_x(u)$
D'après le Lemme des Pentes,
$\dfrac{f(u)-f(x)}{u-x} \leq \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \dfrac{f(y)-f(u)}{y-u}$
et donc $\tau_x(u) \leq \tau_y(u)$

Comme τ_y est croissante, $\tau_y(u) \leq f'(y)$
D'où $f'(x) \leq \tau_x(u) \leq \tau_y(u) \leq f'(y)$
Donc f' est croissante

"$\Longleftarrow$" : On va exploiter le Théorème des Accroissements Finis

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue dérivable sur $]a, b[$
Alors $\exists c \in]a, b[, f'(c) = \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$

Soient $x_1 < x_2 < x_3 \in I^3$
f est continue sur $[x_1, x_2]$ et dérivable sur $]x_1, x_2[$
$\exists c_1 \in]x_1, x_2[, \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(c_1)$

f est continue sur $[x_2, x_3]$ et dérivable sur $]x_2, x_3[$
$\exists c_2 \in]x_2, x_3[, \dfrac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3} = f'(c_2)$

On remarque que $c_1 < x < c_2$
Comme f' est croissante, $f'(c_1) \leq f'(c_2)$

□

Corollaire: Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable
f convexe sur $I \iff \forall x \in I, f''(x) > 0$

Proposition (Inégalité Image / Taux de Variation)**:** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe, dérivable
$\forall (x, a) \in I^2, f(x) \geqslant f'(a)(x - a) + f(a)$

Preuve:
Soit $a \in I$
On pose $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) - f'(a)(x - a) + f(a)$

g est dérivable sur I et $g'(x) = f'(x) - f'(a)$
On sait que f' est croissante sur I

g est décroissante pour $x < a$, croissante pour $x > a$ et $g(a) = 0$
$\forall x \in I, g(x) \geqslant 0$

□

Définition (Concavité)**:** On dit que f est concave si $-f$ est convexe

Proposition (Concavité)**:** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$
f concave $\iff \forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geqslant (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$

Si f est concave sur un intervalle I ouvert, f est continue

Si f est dérivable, f concave $\iff$ f' décroissante

Si f est deux fois dérivable, f concave $\iff$ f'' négative

Si f est dérivable et concave, $\forall (x, a) \in I^2, f(x) < f'(a)(x - a) + f(a)$