Chapitre 11

TD

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

Table des matières

Exercice 23

5. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{2+x}$.
   f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et décroissante sur $]-\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

On pose $g : x \mapsto f(x) - x = \dfrac{1}{2+x} - x$ dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et

$$\forall x \neq 2, g'(x) = -\frac{1}{(2+x)^2} - 1 < 0$$

x	$-\infty$		α		-2		β		$+\infty$
g	$-\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

x	$-\infty$		α		-2		β		$+\infty$
f	0	$\searrow$	α	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	β	$\searrow$	0
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

(u_n) n'est pas définie s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$f^k(u_0) = -2$$

$(f^k(x) \neq (f(x))^k,\ f^k = f \circ \cdots \circ f)$

— On suppose la suite bien définie,

$$\forall x \neq -2, |f'(x)| = \left| -\frac{1}{(2+x)^2} \right| = \frac{1}{(2+x)^2}$$

En particulier si $x > 0$, alors $f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$

— On suppose $u_0 > -2$ alors $u_1 > 0$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, u_n > 0$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, |u_{n+1} - \beta| = |f(u_n) - f(\beta)| \leqslant \frac{1}{4} |u_n - \beta|$$

On en déduit par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, |u_n - \beta| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |u_1 - \beta|$$

Or, $\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Donc, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta$

— Si $u_0 = \alpha$ alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$$

— Si, $u_0 < -2$ et $u_0 \neq \alpha$, je conjecture qu'il existe $p \in \mathbb{N}_*$ tel que $u_p > -2$ et alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta$

Exercice

Pour $n \in \mathbb{N}$,
$$(E_n) : x^5 + nx - 1 = 0$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$.
$\forall n \in \mathbb{R}, f_n'(x) = 5x^4 + n > 0$ sauf si $\begin{cases} x = 0 \\ n = 0 \end{cases}$

u_n est le seul réel tel que $f_n(u_n) = 0$.

x	$-\infty$	0	u_n	$+\infty$
f_n	$-\infty$ ↗	-1 ↗	0 ↗	$+\infty$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} f_n(u_{n+1}) &= u_{n+1}^5 + nu_{n+1} - 1 \\ &= \underbrace{u_{n+1}^5 (n+1)u_{n+1} - 1}_{f_{n+1}(u_{n+1})} - u_{n+1} \\ &= -u_{n+1} < 0 \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} < u_n$.
Les suites (u_n) est décroissante minorée par 0 donc $\boxed{\text{elle converge}}$.

On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
On sait que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n^5 + nu_n - 1 = 0$$

Or,
$$u_n^5 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^5$$
$$nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} -\infty \text{ si } \ell < 0 \\ +\infty \text{ si } \ell > 0 \end{cases}$$

Si, $\ell < 0$ alors $u_p^5 + nu_n - 1 \to -\infty \neq 0$.
Si, $\ell > 0$ alors $u_n^5 + nu_n - 1 \to +\infty \neq 0$.

Donc, $\boxed{\ell = 0}$

Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, nu_n = 1 - u_n^5 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

donc $\boxed{u_n \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}}$

$u_n = \frac{1}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$
Donc,

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, nu_n &= 1 - \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= 1 - \frac{1}{n^5}(1+o(1))^5\\ &= 1 - \frac{1}{n^5}(1+o(1))\\ &= 1 - \frac{1}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)\end{aligned}$$

Donc,

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}_*, nu_n &= 1 - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)^5\\ &= 1 - \frac{1}{n^5}\left(1 - \frac{1}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)^5\\ &= 1 - \frac{1}{n^5}\left(1 - \frac{5}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)\\ &= 1 - \frac{1}{n^5} + \frac{5}{n^{10}} + o\left(\frac{1}{n^10}\right)\end{aligned}$$

Donc,

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + \frac{5}{n^{11}} + o\left(\frac{1}{n^{11}}\right)$$

Exercice 10

1. On sait que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \ell - \varepsilon \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \ell + \varepsilon$$

.1 Méthode 1

En particulier, avec $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} > 0$.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \ell - \varepsilon = \frac{1+\ell}{2} < 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant N}$ est décroissante minorée par 0 donc converge.
On pose $M = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Alors, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$

Si $L \neq 0$ alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{L}{L} = 1 \neq \ell$: une contradiction

Donc $L = 0$

.2 Méthode 2

On pose $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2} > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \ell + \varepsilon = \frac{1+\varepsilon}{2}$$

Donc

$$\forall n \geqslant N, \prod_{k=N}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \prod_{k=N}^{n} \frac{1+\ell}{2}$$

donc

$$\forall n \geqslant N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-N+1}$$

et donc

$$\forall n \geqslant N, u_{n+1} \leqslant \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-N+1} u_n$$

$\dfrac{1+\ell}{2} \in]0,1[$ donc $\left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^{n-N+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Par encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n$, $\dfrac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ mais $u_n \to +\infty$.

   $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{1}{n}$, $\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \dfrac{n}{n+1} \to 1$ mais $u_n \to 0$

Exercice 11

1. Soit $\varepsilon > 0$ (quelconque fixé). On cherche $N \in \mathbb{N}_*$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i\right| \leqslant \varepsilon$$

Soit $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ Il existe $N' \in \mathbb{N}_*$ tel que

$$\forall n \geqslant N', |u_n| \leqslant \varepsilon'$$

La suite $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{N'-1} |u_i|\right)$ converge vers 0.

Il existe $N'' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N'', \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N'-1} |u_i| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

On pose $N = \max(N', N'') \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\forall n \geqslant N, \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i \right| &\leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |u_i| = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{N-1} |u_i| + \sum_{i=1}^{n} |u_i| \right) \\
&\leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N'-1} |u_i| + \frac{n - N' + 1}{n} \varepsilon' \\
&\leqslant \varepsilon' + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N'-1} |u_i| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

2. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n - \ell \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

D'après la 1. ,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} w_i \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Or,

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}_*, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} w_i &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (u_i - \ell) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ell \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i - \ell
\end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i = \ell + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} w_i \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

3. La réciproque est fausse : contre exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, u_n = (-1)^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \right| \leqslant \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Exercice 12

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, \forall k \in \mathbb{N}_*, 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{k} + \frac{k}{n}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $k \in \mathbb{N}_*$ tel que $\frac{1}{k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (par exemple $k = \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$)

La suite $\left(\frac{k}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}_*}$ tends vers 0. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \frac{k}{n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc,

$$\forall n \geqslant N, 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Exercice 3

a.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, u_n &= \sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} - \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n}\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \\ &\sim -\frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

b. $\forall n \in \mathbb{N}_*$

$n - (-1)^n = n\left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right) \sim n$

car $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

De même, $n + (-1)^n \sim n$ donc $u_n \sim \frac{n}{n} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

c. $\forall n \in \mathbb{N}_*$

$$\begin{aligned}u_n &= (2 + (-1)^n)^{\frac{1}{n}} \\ &= e^{\frac{1}{n}\ln(2+(-1)^n)} \\ &= e^{\frac{1}{n}+O(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \\ \text{car } &\frac{1}{n}O(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

e. $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leqslant kx$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}_*$,

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx-1) < u_n \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kx$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}_*$,

$$\underbrace{\frac{1}{n^2}\left(\frac{xn(n+1)}{2} - n\right)}_{\sim\frac{x}{2}} \leqslant u_n \leqslant \underbrace{\frac{x}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2}}_{\sim\frac{x}{2}}$$

Donc, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x}{2}$

g. $\forall n \in \mathbb{N}_*$

$$\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n}$$

donc, $\forall n \in \mathbb{N}_*$,

$$\underbrace{\frac{2n+1}{n+1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}2} \leqslant u_n \leqslant \underbrace{\frac{2n+1}{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}2}$$

donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$

1. $\forall n \in \mathbb{N}_*, u_n = \dfrac{n!}{n^n}$

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant 2, 0 \leqslant u_n &= \frac{1\times 2\times 3\times\ldots\times n}{n\times n\times n\times\ldots\times n}\\ &= \frac{1}{n}\times\frac{2}{n}\times\ldots\times\frac{n}{n}\\ &= \frac{1}{n}\prod_{k=2}^{n}\frac{k}{n} \leqslant \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

Exercice 6

5)

$$\forall n \in \mathbb{N}_* u_n = e^{n\ln\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}+4^{\frac{1}{n}}}{3}\right)}$$

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}+4^{\frac{1}{n}}}{3}\right) &= \ln\left(\frac{1}{3}\left(3+\frac{1}{n}(\ln 2+\ln 3+\ln 4)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\ &= \ln\left(1+\frac{1}{3n}\ln 24+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &\sim \frac{\ln 24}{3n}\end{aligned}$$

Donc, $\ln\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}+4^{\frac{1}{n}}}{3}\right) \sim \dfrac{\ln 24}{3} \to \dfrac{\ln 24}{3}$

$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\frac{1}{3}\ln 24} = \sqrt[3]{24}$

6) $\forall n \in \mathbb{N}_*$,

$$u_n = e^{n^2\ln\left(\frac{\operatorname{Arctan}(n+1)}{\operatorname{Arctan}(n)}\right)}$$

$$\frac{\operatorname{Arctan}(n+1)}{\operatorname{Arctan}(n)} = \frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)} &= \frac{2}{\pi}\times\frac{1}{1-\frac{2}{\pi n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\\ &= \frac{2}{\pi}\left(1+\frac{2}{\pi n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{4}{\pi^2 n^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n+1}\right) &= \frac{\pi}{2}-\frac{1}{n+1}+o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\text{Arctan}(n+1)}{\text{Arctan}(n)} &= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2}\right) \times \left(1 + \frac{2}{\pi n} + \frac{4}{\pi^2 n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= 1 + \frac{2}{\pi n} - \frac{2}{\pi n} + \frac{4}{\pi^2 n^2} - \frac{4}{\pi^2 n^2} + \frac{2}{\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 + \frac{2}{\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

$$\ln\left(\frac{\text{Arctan}(n+1)}{\text{Arctan}(n)}\right) \sim \frac{2}{\pi n^2}$$
$$n^2 \ln\left(\frac{\text{Arctan}(n+1)}{\text{Arctan}(n)}\right) \sim \frac{2}{\pi}$$

Donc, $u_n \to e^{\frac{2}{\pi}}$

Exercice 7

$$\forall n \in \mathbb{N}, a^n - 1 < \lfloor a^n \rfloor \leqslant a^n$$

Cas 1 : $a > 1$ Alors, $a^n - 1 > 0$ et donc,

$$(a^n - 1)^{\frac{1}{n}} < u_n \leqslant a$$

$$\begin{aligned}(a^n-1)^{\frac{1}{n}} &= e^{\frac{1}{n}\ln(a^n-1)} \\ &= e^{\frac{1}{n}\ln\left(a^n\left(1-\frac{1}{a^n}\right)\right)} \\ &= \ln(a) + \frac{1}{n}\ln\left(1 - \frac{1}{a^n}\right) \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\ln a} = a\end{aligned}$$

Cas 2 : $a = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}_*, u_n = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 = a$

Cas 3 : $0 < a < 1$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, a^n \in]0, 1[$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}_* \lfloor a^n \rfloor = 0$$

donc u_n n'existe pas (car $\forall n \in \mathbb{N}_*, u_n = e^{\frac{1}{n}\ln(\lfloor a^n \rfloor)}$ et $\ln(0)$ n'existe pas)

Exercice 3

On pose

$$\begin{cases}\ell_1 = \lim u_{2n} \\ \ell_2 = \lim u_{2n+1} \\ \ell_3 = \lim u_{3n}\end{cases}$$

$(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de (u_{2n}) et de (u_{3n}) donc

$$u_{6n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$$
$$u_{6n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_3$$

Par unicité de la limite, $\ell_1 = \ell_3$.
$(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous suite de (u_{2n+1}) et de (u_{3n}) donc $\ell_2 = \ell_3$

D'où $\ell_1 = \ell_2$, (u_n) converge.

Exercice 14

<u>Méthode 1</u>

Soit $n \in \mathbb{N}_*$

$$\begin{aligned}
u_n &= \sqrt{n^2+3n+7} - \sqrt{n^2+an+b} \\
&= n\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}} - n\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}} \\
&= n\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}\right) - \frac{1}{8}\times\frac{9}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&- n\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}\right) - \frac{1}{8}\times\frac{a^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \frac{3-a}{2} + \left(\frac{7}{2}-\frac{9}{8}-\frac{b}{2}+\frac{a^2}{8}\right)\times\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3-a}{2}
\end{aligned}$$

<u>Méthode 2</u>

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{(n^2+3n+7)-(n^2+an+b)}{\sqrt{n^2+3n+7}+\sqrt{n^2+an+b}} \\
&\sim \begin{cases} \dfrac{(3-a)n}{2n} & \text{si } a \neq 3 \to \dfrac{3-a}{2} \\ \dfrac{7-b}{2n} & \text{si } a = 3 \to 0 = \dfrac{3-a}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

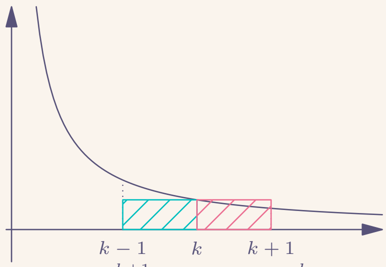
$\sqrt{n^2+3n+7} = n + o(n)$ car $\dfrac{\sqrt{n^2+3n+7}}{n} = \sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{7}{n^2}} \to 1$
pour la même raison, $\sqrt{n^2+an+b} = n + o(n)$

Donc, $\sqrt{n^2+3n+7}+\sqrt{n^2+an+b} = 2n + o(n) \sim 2n$

Exercice 9

Hyper classique !

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$



$$\forall k > 2, \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$$

Or,

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$$

donc

$$\forall k \geqslant 2, \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k}$$

et

$$\forall k \geqslant 1, \frac{1}{k+1} \leqslant \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}_*$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$u_n - v_n = -\ln(n+1) + \ln(n) = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

3. (u_n) converge, on note γ sa limite :

$$u_n = \gamma + o(1)$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = \gamma + o(1)$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)}$$

4. $S_n \sim \ln(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

5.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \\
&= \ln(2n) + \gamma + o(1) - \ln(n-1) - \gamma + o(1) \\
&= \ln\left(\frac{2n}{n-1} + o(1)\right) \\
&\xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln 2
\end{aligned}
$$

Exercice 23

4.

$$
\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + 1 \end{cases}
$$

On pose

$$
\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + 1 \end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + 1 - x \end{aligned}
$$

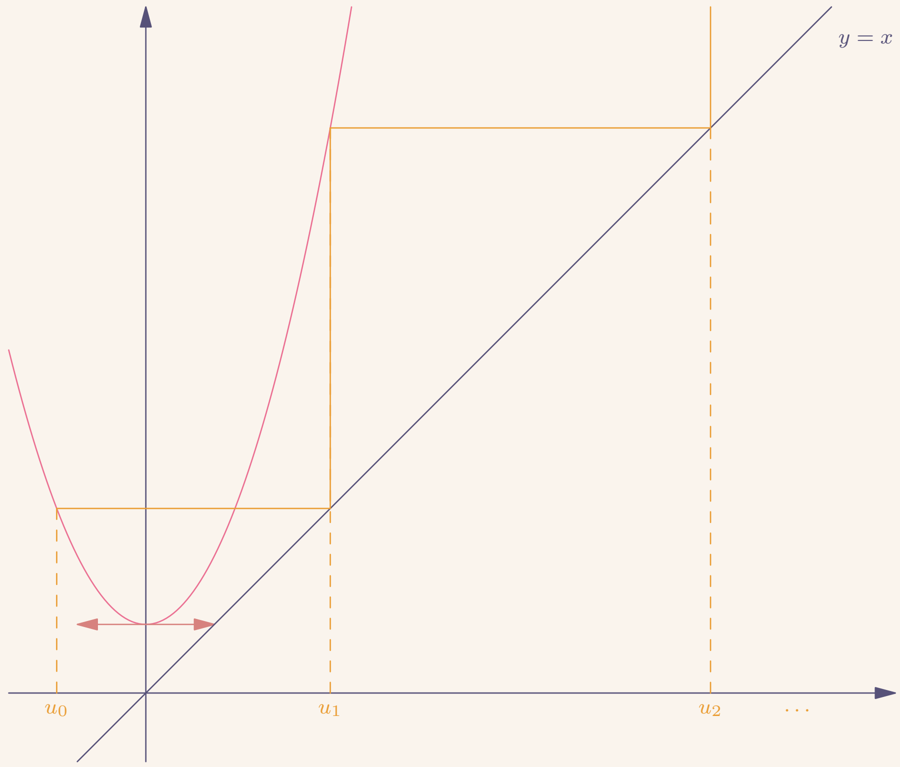
x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$g(x)$			$+$		

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
g		$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	

$[0, +\infty[$ est stable par f,

$$
u_1 = f(u_0) \geqslant 1
$$

donc $u_1 \in [0, +\infty[$



Donc, $\forall n \geqslant 1, u_n \in [0, +\infty[$.
De plus,

$$\forall n \geqslant 1, u_{n+1} - u_n = g(u_n) > 0$$

Donc, (u_n) croissante donc elle a une limite finie ou $+\infty$.

On suppose que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.
Comme f est continue, $f(\ell) = \ell$. Alors, $g(\ell) = 0$: une contradiction

8.

$$u_0 \in [-2, 2] \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$$

Soit $f : x \mapsto \sqrt{2 - x}$

x	-2		1		2
f	2	$\searrow$	1	$\searrow$	0
$g(x)$		$+$	0	$-$	

On pose $g : x \mapsto f(x) - x$

x	-2	α	2
g	4	0	-2

$$\begin{aligned}
g(\alpha)=0 &\iff \alpha=\sqrt{2-\alpha}\\
&\iff \begin{cases}\alpha^2=2-\alpha\\ \alpha\geqslant 0\end{cases}\\
&\iff \alpha=1
\end{aligned}$$

On pose

$$\forall n\in\mathbb{N},\begin{cases}v_n=u_{2n}\\ w_n=u_{2n+1}\end{cases}$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\begin{cases}v_{n+1}=u_{2n+2}=f(f(u_{2n}))=f\circ f(v_n)\\ w_{n+1}=u_{2n+3}=f\circ f(w_n)\end{cases}$$

x	-2	1	2
$f\circ f$	0		$\sqrt{2}$

On pose $h : x\mapsto f(f(x))-x=\sqrt{2-\sqrt{2-x}}-x$

$$\begin{aligned}
\forall x\in]-2,2[, h'(x) &= \frac{-\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}}{2\sqrt{2-\sqrt{2-x}}}-1\\
&=\frac{1}{4\sqrt{2-x}\sqrt{2-\sqrt{2-x}}}-1\\
&=\frac{1-4\sqrt{4-2x-(2-x)\sqrt{2-x}}}{4\sqrt{2-x}\sqrt{2-\sqrt{2-x}}}
\end{aligned}$$

$1-4\sqrt{4-2x-(2-x)\sqrt{2-x}}$ a le même signe que $\left(1-4\sqrt{4-2x-(2-x)\sqrt{2-x}}\right)\left(1+4\sqrt{4-2x-(2-x)\sqrt{2-x}}\right)$ donc que $1-16\left(4-2x-(2-x)\sqrt{2-x}\right)$.

On décide de passer par l'inégalité des accroissements finis.

$$\forall x \in]-2,2[, \left|f'(x)\right| = \left|-\frac{1}{2\sqrt{2-x}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{2-x}} < 1$$
$$\iff \sqrt{2-x} > \frac{1}{2}$$
$$\iff 2-x > \frac{1}{4}$$
$$\iff x < \frac{7}{4}$$

— Si $u_0 < \dfrac{7}{4}$ alors,
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1}| < M\,|u_n - 1|$$
avec $M = \sup\limits_{x \in]-2,u_n[} \left|f'(x)\right| < 1$
Donc, $|u_n - 1| < M^n\,|u_0 - 1| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

— Si $u_0 > \dfrac{7}{4}$ alors $u_1 < \dfrac{7}{4} \cdots$ (pas prouvé rigoureusement)

Exercice

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \end{cases}$$

On pose
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_*^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \end{aligned}$$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et
$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right)$$

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{a}$	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	

On pose
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) - x \end{aligned}$$

$$\forall x > 0, g'(x) = f'(x) - 1 = -\frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2} < 0$$

x	0	$\sqrt{a}$	$+\infty$
g	$+\infty$ $\searrow$	0 $\searrow$	$-\infty$

$$\forall x > 0, g(x) = -\frac{x}{2} + \frac{a}{2x}$$

— Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: "u_n existe et $u_n > 0$"
  — D'après l'énoncé, u_0 existe et $u_0 > 0$. Donc, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
  — Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie.
  $u_n > 0$ donc u_n appartient au domaine de définition de f donc u_{n+1} existe. De plus, $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant \sqrt{a} > 0$
  Donc, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie

— Pour $n \in \mathbb{N}_*$, $\mathscr{Q}(n)$: "$u_n \geqslant \sqrt{a}$"
  — $u_1 = f(u_0) \geqslant \sqrt{a}$
  — Soit $n \in \mathbb{N}_*$ tel que $u_n \geqslant \sqrt{a}$. Alors, $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant \sqrt{a}$

De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, u_n \geqslant \sqrt{a}$$

donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, u_{n+1} - u_n = g(u_n) \leqslant 0$$

Donc, (u_n) est décroissante, minorée par $\sqrt{a}$ donc (u_n) converge vers un point fixe de f (car f est continue).
Or, $\sqrt{a}$ est le seul point fixe de f. Donc,

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{a}$$

Exercice 21

1. $\{\lim u_n\}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

   (u_n) diverge car $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
   1 est la valeur d'adhérence de (u_n) car $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

   Soit $\ell \neq 1$ un autre valeur d'adhérence.
   Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$
   Comme $\ell \neq 1$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

   $$1 \notin [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$$

   $$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_{\varphi(n)} \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$$

   Donc

   $$\forall n \geqslant N, \varphi(n) \text{ impair}$$

Donc,

$$\forall n \geqslant N, u_{\varphi(n)} = \varphi(n) \geqslant n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Donc $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

3. Soit u bornée divergente. D'après le théorème de Bolzano Weierstrass, u a au moins une valeur d'adhérence ℓ.
u diverge donc $u_n \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, |u_n - \ell| > \varepsilon$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (N=1) :& \exists n_1 \geqslant 1, |u_{n_1} - \ell| > \varepsilon \\ (N = n_1 + 1) :& \exists n_2 \geqslant n_1 + 1, |u_{n_2} - \ell| > \varepsilon \\ (N = n_2 + 1) :& \exists n_3 \geqslant n_2 + 1, |u_{n_3} - \ell| > \varepsilon \end{aligned}$$

On construit de cette façon $(n_k)_k$ strictement croissante telle que

$$\forall k, |u_{n_k} - \ell| > \varepsilon$$

(u_{n_k}) est une sous suite de u donc bornée.
D'après le théorème de Bolzano Weierstrass, $(u_{n_k})_k$ a une sous suite $\left(u_{n_{\varphi(k)}}\right)_k$ convergente vers ℓ' ($\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante).
Or, $\forall k, \left|u_{n_{\varphi(k)}} - \ell\right| > \varepsilon$
Donc, $u_{n_{\varphi(k)}} \not\xrightarrow[k\to+\infty]{} \ell$. Donc, $\ell' \neq \ell$.
Or, $\left(u_{n_{\varphi(k)}}\right)$ est une sous suite de (u_n) donc ℓ' est une valeur d'adhérence de u.

Exercice 19

1. Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Soient $p \geqslant N$ et $q \geqslant N$.

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| &= |u_p - \ell + \ell - u_q| \\ &\leqslant |u_p - \ell| + |u_q - \ell| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

2. Soit u une suite de Cauchy.
On sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p > N, \forall q > N, |u_p - u_q| \leqslant 1$$

En particulier,

$$\forall n > N, |u_n - u_{N+1}| \leqslant 1$$

donc

$$\forall n > N, u_{N+1} - 1 \leqslant u_n \leqslant 1 + u_{N+1}$$

donc $(u_n)_{n>N}$ est bornée. Il existe $M_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n > N, |u_n| \leqslant M_1$$

La famille $(u_n)_{n\leqslant N}$ est finie. On pose

$$M_2 = \max_{n\in[\![0,N]\!]} |u_n|$$

On pose $M = \max(M_1, M_2)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$$

Donc (u_n) est bornée.

3. Comme a est bornée, (b_n) est bien définie.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} b_{n+1} = \sup\{a_p \mid p \geqslant n+1\} \\ b_n = \sup\{a_p \mid p \geqslant n\} \end{cases}$$

$$\forall p \geqslant n+1, a_p \leqslant b_n (\text{car } p \geqslant n)$$

Donc, b_n majore $\{a_p \mid p \geqslant n+1\}$ donc $b_{n+1} \leqslant b_n$
La suite (b_n) est décroissante.
Comme (a_n) est bornée, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant a_n$$

En particulier,

$$\forall p \geqslant n, b_n \leqslant a_p \geqslant m$$

Ainsi, (b_n) est minorée.
Donc, (b_n) converge.

(b) Comme (b_n) converge vers a, il existe donc $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, |b_n - a| \leqslant \varepsilon$$

et donc

$$\forall n \geqslant N_1, b_n \leqslant a + \varepsilon$$

Comme (a_n) est de Cauchy, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p > N_2, \forall n > N_2, |a_p - a_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc

$$\forall p > N_1, \forall n > N_2, a_p \leqslant a_n + \frac{\varepsilon}{2}$$

On pose $N = \max(N_1, N_2) + 1$.
Comme $N \geqslant N_1$, on a $\boxed{b_n \leqslant a + \varepsilon}$
De plus,

$$\forall n \geqslant N, n > N_2$$

et donc $\boxed{\forall n \geqslant N, \forall p \geqslant N, a_p \leqslant a_n + \frac{\varepsilon}{2}}$

(c) On sait déjà que $b_N \leqslant a + \varepsilon$
Soit $n \geqslant N$
— $b_n = \sup\{a_p \mid p \geqslant N\} \geqslant a_n$
— $\forall p \geqslant N, a_p \leqslant a_n + \frac{\varepsilon}{2}$
donc $a_n + \frac{\varepsilon}{2}$ majore $\{a_p \mid p \geqslant N\}$.
donc $a_n + \frac{\varepsilon}{2} \geqslant b_N$

Enfin, (b_n) est décroissante de limite a donc $b_N \geqslant a$ donc $b_N - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant a - \frac{\varepsilon}{2} > a - \varepsilon$.
En particulier

$$\forall n \geqslant N, a - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant a + \varepsilon$$

Donc (a_n) converge vers a par définition de la limite