Chapitre 13

TD

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

Table des matières

Exercice 5

$$(S) : AX = 0 \text{ où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &\iff \mathrm{rg}(A) = n \\ &\iff \mathrm{rg}(S) = n \\ &\iff S \text{ est de Cramer} \\ &\iff X = 0 \text{ est la seule solution de } (S) \end{aligned}$$

On suppose $X \neq 0$ tel que $AX = 0$ et on cherche une contradiction.

$$\begin{aligned} (S) &\iff \forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \\ &\implies \forall i \in [\![1, n]\!] - a_{ii} x_i = \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j \\ &\implies \forall i \in [\![1, n]\!], |a_{ii}| \, |x_i| = \left| \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j \right| \\ &\implies \forall i \in [\![1, n]\!] \, |a_{ii}| \, |x_i| \leqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \, |x_j| \end{aligned}$$

Soit i_0 tel que $|x_{i_0}| = \max\limits_{i \leqslant j \leqslant n} (|x_j|)$ ($i_0 = \mathrm{argmax}\, 1 \leqslant j \leqslant n \, (|x_j|)$)
Comme $X \neq 0$, $x_{i_0} > 0$, donc

$$|a_{i_0, i_0}| \leqslant \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0, j}| \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leqslant \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0, j}|$$

une contradiction ↯

Exercice 10

Soient a, b, c, d différents de -1.