Chapitre 14

Continuité

Hugo Salou MP2I

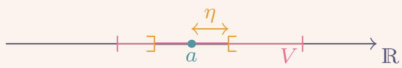
Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Définition d'une limite de fonctions

Définition: Soit $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et $V \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

1. Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que V est un <u>voisinage</u> si
$$\exists \eta > 0,\ ]a-\eta, a+\eta[\subset V.$$


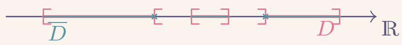
2. Si $a = +\infty$, on dit que V est un <u>voisinage</u> de a si
$$\exists M \in \mathbb{R},\ ]M, +\infty[\subset V.$$
3. Si $a = -\infty$, on dit que V est un <u>voisinage</u> de a si
$$\exists m \in \mathbb{R},\ ]-\infty, m[\subset V.$$

On note $\mathscr{V}_a$ l'ensemble des voisinages de a.

L'utilisation des voisinages permet d'exprimer une limite finie ou infinie plus simplement, sans disjonction de cas.

En utilisant cette nouvelle notation, on peut redéfinir la limite plus simplement.

Définition: Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles. Soit $a \in \overline{D} = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall V \in \mathscr{V}_x,\ V \cap D \neq \varnothing\}$ (on “rajoute” chacune des bornes exclues des intervalles composant D) :



On dit que $f(x)$ <u>tends vers</u> ℓ si
$$\forall V \in \mathscr{V}_\ell,\ \exists W \in \mathscr{V}_a,\ \forall x \in W \cap D,\ f(x) \in V.$$

Définition: Soit $a \in \mathbb{R}$.

Un <u>voisinage à gauche</u> de a est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient un inveralle $]a-\eta, a]$ avec $\eta > 0$.

Un <u>voisinage à droite</u> de a est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient un inveralle $[a, a+\eta[$ avec $\eta > 0$.

Proposition: Si f admet une limite finie en $a \in I$, alors cette limite vaut $f(a)$. ■

Remarque:
De même si $a \in \mathscr{D}$ et si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \leqslant}} f(x)$ existe (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \geqslant}} f(x)$) alors $f(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ \leqslant}} f(x)$ (resp $f(a) =$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \geqslant}} f(x)$)

Définition: Soit f définie sur D et $a \in D$. On dit que f est <u>continue en a</u> si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe ou si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x) = f(a)$.

Proposition: f est continue en a si et seulement si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} = f(a)$$

■

Lemme: Soient $a \neq b$ deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$
Alors $\exists V \in \mathscr{V}_a, \exists W \in \mathscr{V}_b, V \cap W = \varnothing$

■

Théorème: Soit f définie sur $\mathscr{D}$ et $a \in \overline{\mathscr{D}}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \forall (x_n) \in \mathscr{D}^{\mathbb{N}} \left(x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a \implies f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \right)$$

■

Proposition: Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_2$
alors

1. $f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1 + \ell_2$
2. $f(x) \times g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1 \times \ell_2$
3. Si $\ell_2 \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$

■

Proposition: Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1$ et $g(x) \xrightarrow[x \to \ell_1]{} \ell_2$ alors $g(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_2$

■

Corollaire: Une somme, un produit, une composée de fonctions continues sont continues. □

Remarque:

Pour démontrer que $f(x)$ n'a pas de limite quands x tend vers a. On cherche deux suites (x_n) et (y_n) de limite a avec

$$\begin{cases} f(x_n) \longrightarrow \ell_1 \\ f(y_n) \longrightarrow \ell_2 \\ \ell_1 \neq \ell_2 \end{cases}$$

Théorème (Limite monotone)**:** Soit f une fonction croissante sur $]a,b[$ avec $a \neq b \in \overline{\mathbb{R}}$.

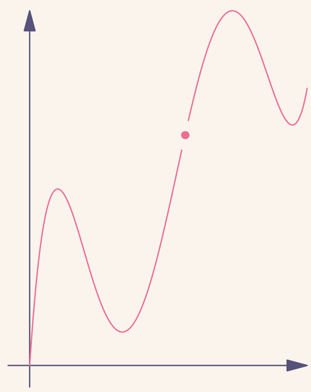
1. Si f est majorée,
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in]a,b[, f(x) \leqslant M$$
alors $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = \sup\limits_{x \in]a,b[} f(x) \in \mathbb{R}$
2. Si f n'est pas majorée,
$$\lim_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = +\infty$$
3. Si f est minorée,
$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in]a,b[, f(x) \leqslant m$$
alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \inf\limits_{]a,b[} f \in \mathbb{R}$
4. Si f n'est pas minorée, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$

■

Remarque:
Avec les hypothèses ci-dessus, pour tout $x \in]a,b[$,
f est croissante sur $]a,x[$, et majorée par $f(x)$ donc $\lim\limits_{\substack{t \to x \\ <}} f(t) \in \mathbb{R}$

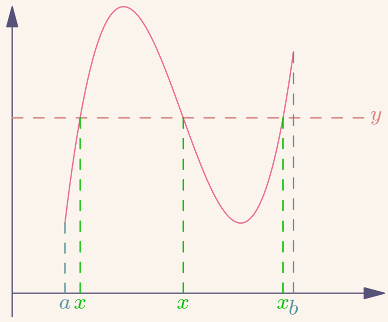
f est croissante sur $]x,b[$ et minorée par $f(x)$ donc $\lim\limits_{\substack{t \to x \\ >}} f(t) \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{\substack{t \to x \\ <}} f(t) \leqslant f(x) \leqslant \lim\limits_{\substack{t \to x \\ >}} f(t)$



Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)**:** Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $a < b$ deux éléments de I.

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \cup [f(b), f(a)]\,,\ \exists x \in [a,b],\ y = f(x)$$



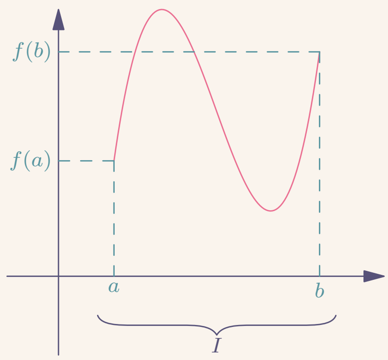
Lemme: Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $a < b$ deux éléments de I tels que $f(a) \leqslant 0 \leqslant f(b)$. Alors,

$$\exists x \in [a, b], f(x) = 0$$

■

■

Corollaire: Soit f continue sur un intervalle I. Alors, $f(I)$ est un intervalle.



■

Corollaire: On peut généraliser le théorème des valeurs intermédiaires au cas où $\begin{cases} a \in \overline{R} \\ b \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases}$ en remplaçant $f(a)$ par $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$ et $f(b)$ par $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x)$

□

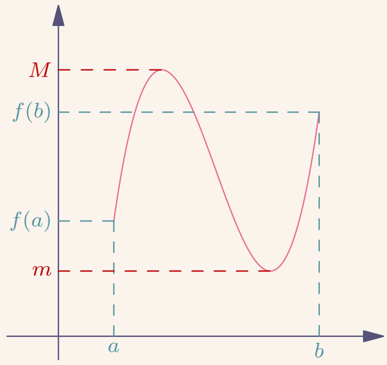
Théorème (Théorème de la bijection)**:** Soit f continue, strictement monotone sur un intervalle I. Alors, $J = f(I)$ est un intervalle de même nature (ouvert, semi-ouvert ou fermé) et f établit une bijection de I sur J.

■

Théorème: Soit f continue sur un segment $[a, b]$. Alors, f est bornée et atteint ses bornes, i.e.

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, f([a, b]) = [m, M]$$

⚠ On peut avoir $m \neq f(a)$ et $M \neq f(b)$



■

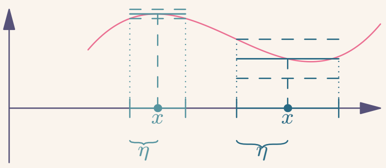
Deuxième partie

Continuité uniforme

Remarque:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue,

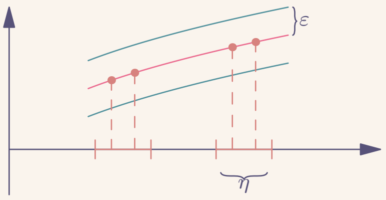
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in]x-\eta, x+\eta[, |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Ici, η dépend de ε et de x



Dans certaines situations, il serait préférable d'avoir

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x-y| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$



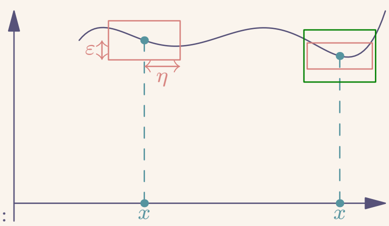
Lemme: Soit f uniformément continue sur un intervalle I. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments dans I telles que $x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$ □

Théorème (Théorème de Heine)**:** Soit f une function continue sur $[a,b]$. Alors, f est uniformément continue sur $[a,b]$.

■

Remarque:



$$\begin{cases} \eta > 0 \\ \varepsilon > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-y| \leqslant \eta \\ |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

Définition: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle et $k \in \mathbb{R}$. On dit que f est <u>k-lipschitzienne</u> si

$$\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x-y|$$

On dit que f est lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que f soit k-lipschitzienne.

Proposition: Soit f une fonction lipschitzienne sur I. Alors, f est uniformément continue sur I donc continue sur I.

■

Théorème: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in I, \left|f'(x)\right| \leqslant M$$

Alors

$$\forall (a,b) \in I^2, |f(a) - f(b)| \leqslant M\,|a-b|$$

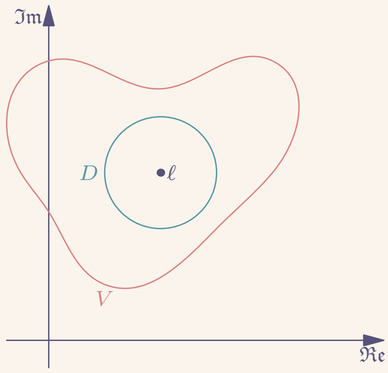
donc f est M-lipschitzienne.

Corollaire: Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors f est lipschitzienne.

■

Troisième partie

Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$



Définition:

V est un <u>voisinage</u> de ℓ s'il existe $r > 0$ tel que $V \supset D(\ell, r)$
où $D(l, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \ell| < r\}$

Proposition: Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$, $\ell \in \mathbb{C}$.

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathfrak{Re}(\ell) \\ \mathfrak{Im}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathfrak{Im}(\ell) \end{cases}$$

$\square$

Remarque (Rappel):
On dit que : $I \to \mathbb{C}$ est <u>bornée</u> s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, |f(x)| \leqslant M$$

Quatrième partie

Annexe

Théorème: *Théorème 2.11*
$f : I \to J$ bijective monotone avec I et J deux intervalles.
Alors, f^{-1} est continue (et f aussi)

■

Définition: Un homéomorphisme est une application bijective, continue dont la réciproque est continue.

Remarque:
Preuve du programme de colle ■