

CHAPITRE 14

Continuité

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

I	Définition d'une limite de fonctions	2
II	Continuité uniforme	14
III	Fonctions à valeurs dans \mathbb{C}	19
IV	Annexe	21

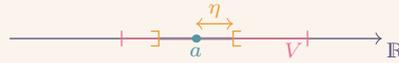
Première partie

Définition d'une limite de fonctions

Définition: Soit $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et $V \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

1. Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que V est un voisinage si

$$\exists \eta > 0,]a - \eta, a + \eta[\subset V.$$



2. Si $a = +\infty$, on dit que V est un voisinage de a si

$$\exists M \in \mathbb{R},]M, +\infty[\subset V.$$

3. Si $a = -\infty$, on dit que V est un voisinage de a si

$$\exists m \in \mathbb{R},]-\infty, m[\subset V.$$

On note \mathcal{V}_a l'ensemble des voisinages de a .

L'utilisation des voisinages permet d'exprimer une limite finie ou infinie plus simplement, sans disjonction de cas.

EXEMPLE:

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de limite $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Si $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - a| \leq \varepsilon \\ \text{i.e. } & \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, a - \varepsilon \leq u_n \leq a + \varepsilon \\ \text{i.e. } & \forall V \in \mathcal{V}_a, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in V. \end{aligned}$$

- Si $a = +\infty$,

$$\begin{aligned} & \forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq M \\ \text{i.e. } & \forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in [M, +\infty[\\ \text{i.e. } & \forall V \in \mathcal{V}_a, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in V. \end{aligned}$$

- Si $a = -\infty$,

$$\begin{aligned} & \forall m \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq m \\ \text{i.e. } & \forall m \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in]-\infty, m] \\ \text{i.e. } & \forall V \in \mathcal{V}_a, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in V. \end{aligned}$$

Même si, dans chacun des cas, la définition de limite de la suite u est différente, en utilisant les voisinages, la notation est identique :

$$\forall V \in \mathcal{V}_a, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in V.$$

En utilisant cette nouvelle notation, on peut redéfinir la limite plus simplement.

Définition: Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles. Soit $a \in \overline{D} = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall V \in \mathcal{V}_x, V \cap D \neq \emptyset\}$ (on "rajoute" chacune des bornes exclues des intervalles composant D) :



On dit que $f(x)$ tends vers ℓ si

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell, \exists W \in \mathcal{V}_a, \forall x \in W \cap D, f(x) \in V.$$

EXEMPLE:

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1} 1$.

$$\forall V \in \mathcal{V}_1, \exists W \in \mathcal{V}_{-1}, \forall x \in W, f(x) \in V$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in]-1 - \eta, -1 + \eta[, f(x) \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$$

i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (|x - (-1)| < \eta \implies |f(x) - 1| \leq \varepsilon).$$

Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$,

$$\forall V \in \mathcal{V}_{+\infty}, \exists W \in \mathcal{V}_{-\infty}, \forall x \in W, f(x) \in V$$

i.e.

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in]-\infty, m], f(x) \in [M, +\infty[$$

i.e.

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (x \leq m \implies f(x) \geq M).$$

Définition: Soit $a \in \mathbb{R}$.

Un voisinage à gauche de a est une partie de \mathbb{R} qui contient un intervalle $]a - \eta, a]$ avec $\eta > 0$.

Un voisinage à droite de a est une partie de \mathbb{R} qui contient un intervalle $[a, a + \eta[$ avec $\eta > 0$.

EXEMPLE:

$$\text{Soit } f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

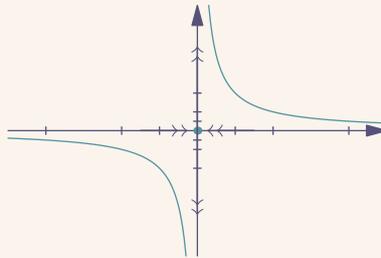
1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe ? Si oui, que vaut elle ?
2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \leq}} f(x)$ existe ? Si oui, que vaut elle ?

Réponse : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas. Pour le prouver, on raisonne par l'absurde.

$$\ell = \bigcap_{V \in \mathcal{V}_\ell} V$$

Si ℓ existe, alors $\ell = f(0)$.

Or, $0 \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$



Proposition: Si f admet une limite finie en $a \in I$, alors cette limite vaut $f(a)$.

Preuve:

Soit $\ell = \lim_{x \rightarrow a}$ et $a \in \mathcal{D}$.

On sait que

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell, \exists W \in \mathcal{V}_a, \forall x \in W \cap \mathcal{D}, f(x) \in V.$$

Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Alors, $f(a) \in V$.

$$f(a) \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}_\ell} V = \begin{cases} \{\ell\} & \text{si } \ell \in \mathbb{R}, \\ \emptyset & \text{si } \ell = \pm\infty. \end{cases}$$

Donc $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell = f(a)$. □

REMARQUE:

De même si $a \in \mathcal{D}$ et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe (resp. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$) alors $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (resp $f(a) =$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \geq}} f(x))$$



EXEMPLE:

$\lim_{x \rightarrow 0} \delta(x)$ n'existe pas

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \delta(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \delta(x)$ n'existent pas non plus.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \neq}} \delta(x)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} \delta(x) = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \delta(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \neq}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Définition: Soit f définie sur D et $a \in D$. On dit que f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe ou si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \neq}} f(x) = f(a)$.

EXEMPLE:

$$\text{Soit } f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \neq}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0)$$

Donc f est continue en 0.

Proposition: f est continue en a si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Preuve (unicité de la limite):

On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow u} a$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow u} b$ avec $a \neq b$.

Soient V et W comme dans le lemme (suivant),

$$\begin{cases} \exists W_1 \in \mathcal{V}_u, \forall x \in W_1 \cap \mathcal{D}, f(x) \in V \\ \exists W_2 \in \mathcal{V}_u, \forall x \in W_2 \cap \mathcal{D}, f(x) \in W \end{cases}$$

Donc

$$\forall x \in \underbrace{W_1 \cap W_2 \cap \mathcal{D}}_{\neq \emptyset \text{ car } W_1 \cap W_2 \in \mathcal{V}_u} \quad f(x) \in V \cap W = \emptyset$$

□

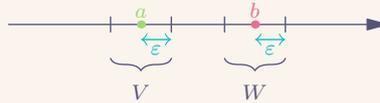
Lemme: Soient $a \neq b$ deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$
Alors $\exists V \in \mathcal{V}_a, \exists W \in \mathcal{V}_b, V \cap W = \emptyset$

Preuve: CAS 1 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $a < b$.

On pose $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$,

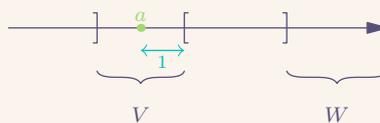
$$\begin{cases} V =]a - \varepsilon; a + \varepsilon[\\ W =]b - \varepsilon; b + \varepsilon[\end{cases}$$

On vérifie que $V \cap W = \emptyset$



CAS 2 $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$

$$\begin{cases} V =]a - 1; a + 1[\\ W =]a + 2; +\infty[\end{cases}$$



CAS 3 $a = -\infty, b = +\infty$

$$\begin{cases} V =]-\infty; 0[\\ W =]0; +\infty[\end{cases}$$

□

Théorème: Soit f définie sur \mathcal{D} et $a \in \overline{\mathcal{D}}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \iff \forall (x_n) \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}} \left(x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \implies f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \right)$$

Preuve: “ \implies ” On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Soit $(x_n) \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$

Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Soit $W \in \mathcal{V}_a$ tel que

$$\forall x \in W \cap \mathcal{D}, f(x) \in V$$

$x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, x_n \in W \cap \mathcal{D}$$

Donc

$$\forall n \geq N, f(x_n) \in V$$

D'où, $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$

“ \impliedby ” On suppose que $f(x) \not\xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$

$$\exists V \in \mathcal{V}_\ell, \forall W \in \mathcal{V}_a, \exists x \in W \cap \mathcal{D}, f(x) \notin V$$

Soit V comme ci dessus. Soit $W_1 \in \mathcal{V}_a$.

CAS 1 $a \in \mathcal{D}$ et $\forall x \in W \cap \mathcal{D} \setminus \{a\}, f(x) \in V$.

On le prouve par la contraposée. On suppose $f(x) \not\xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R}$

Donc,

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in]a - \eta, a + \eta[, |f(x) - \ell| > \varepsilon$$

On considère un tel ε donc

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, \exists x_n \in \left] a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right[, |f(x_n) - \ell| > \varepsilon$$

Par encadrement, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ et $f(x_n) \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$

CAS 2 Soit $x_1 \in W_1 \cap \mathcal{D}$ tel que $f(x_1) \notin V$

$$\begin{cases} x_1 \in \mathcal{D} \\ a \notin \mathcal{D} \end{cases} \text{ donc } x_1 \neq a$$

CAS 3 $\exists x \in W_1 \cap \mathcal{D} \setminus \{a\}, f(x) \notin V$

Soit x_1 un tel élément :

$$x_1 \in W_1 \cap \mathcal{D}$$

$$x_1 \neq a$$

$$f(x_1) \notin V$$

Dans les cas 2 et 3, on pose $W_2 \in \mathcal{V}_a$ tel que

$$W_2 \subset W_1 \setminus \{x_1\}$$

En itérant ce procédé, on construit une suite (x_n) qui tend vers a et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \notin V$$

et donc $f(x_n) \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$

□

Proposition: Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_2$

alors

1. $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1 + \ell_2$
2. $f(x) \times g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1 \times \ell_2$
3. Si $\ell_2 \neq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{\ell_1}{\ell_2}$

Preuve: 1. Soit (x_n) une suite qui tend vers a alors $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_1$ et $g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_2$

$$\text{Donc, } f(x_n) + g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_1 + \ell_2$$

$$\text{Donc } f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1 + \ell_2$$

□

Proposition: Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \ell_1} \ell_2$ alors $g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_2$

Preuve:

Soit (x_n) une suite qui tend vers a . Alors, $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_1$ donc $g(f(x_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_2$

donc $g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_2$ □

Corollaire: Une somme, un produit, une composée de fonctions continues sont continues. □

REMARQUE:

Pour démontrer que $f(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers a . On cherche deux suites (x_n) et (y_n) de limite a avec

$$\begin{cases} f(x_n) \rightarrow \ell_1 \\ f(y_n) \rightarrow \ell_2 \\ \ell_1 \neq \ell_2 \end{cases}$$

EXEMPLE:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sin(2\pi n) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Or,

$$\begin{aligned} 2\pi n &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \end{aligned}$$

Donc, \sin n'a pas de limite en $+\infty$

Théorème (Limite monotone): Soit f une fonction croissante sur $]a, b[$ avec $a \neq b \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si f est majorée,

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in]a, b[, f(x) \leq M$$

$$\text{alors } \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ <}} f(x) = \sup_{x \in]a, b[} f(x) \in \mathbb{R}$$

2. Si f n'est pas majorée,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ <}} f(x) = +\infty$$

3. Si f est minorée,

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in]a, b[, f(x) \geq m$$

$$\text{alors } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ >}} f(x) = \inf_{x \in]a, b[} f(x) \in \mathbb{R}$$

4. Si f n'est pas minorée, $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ >}} f(x) = -\infty$

Preuve: 1. $\sup_{]a, b[} f$ existe

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in]a, b[, f(x) > \sup_{]a, b[} f - \varepsilon$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in]a, b[, \forall y \in [x, b[, \sup_{]a, b[} f - \varepsilon < f(y) \leq \sup_{]a, b[} f < \sup_{]a, b[} f + \varepsilon$$

$$\text{donc } f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow b \\ <}]{} \sup_{]a, b[} f$$

2. f n'est pas majorée

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in]a, b[, f(x) > M$$

donc

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in]a, b[, \forall y \in [x, b[, f(y) \in [M, +\infty[$$

□

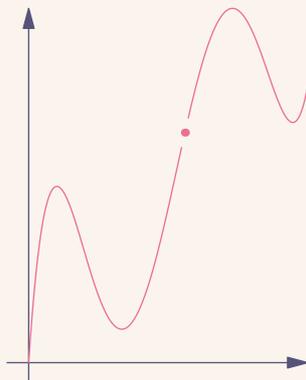
REMARQUE:

Avec les hypothèses ci-dessus, pour tout $x \in]a, b[$,

f est croissante sur $]a, x[$, et majorée par $f(x)$ donc $\lim_{\substack{t \rightarrow x \\ <}} f(t) \in \mathbb{R}$

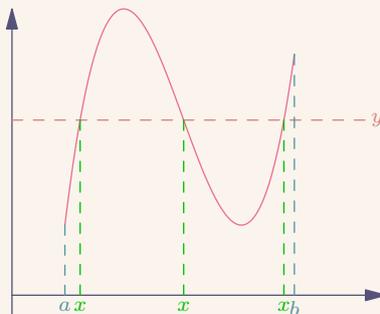
f est croissante sur $]x, b[$ et minorée par $f(x)$ donc $\lim_{\substack{t \rightarrow x \\ >}} f(t) \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow x \\ <}} f(t) \leq f(x) \leq \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ >}} f(t)$$



Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires): Soit f une fonction continue sur un intervalle I , $a < b$ deux éléments de I .

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \cup [f(b), f(a)], \exists x \in [a, b], y = f(x)$$



Lemme: Soit f une fonction continue sur un intervalle I , $a < b$ deux éléments de I tels que $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Alors,

$$\exists x \in [a, b], f(x) = 0$$

Preuve (du lemme):

On pose $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq 0\}$

$A \neq \emptyset$ car $a \in A$ et A est majorée par b .

On pose $u = \sup(A)$. Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers u .

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a \leq x_n \leq b \\ f(x_n) \leq 0 \end{cases}$$

On sait que $x_n \rightarrow u$ et $f(x_n) \rightarrow f(u)$ par continuité de f .

$$\text{Donc, } \begin{cases} a \leq u \leq b \\ f(u) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{donc } u = \max(A))$$

De plus,

$$\forall x \in]u, b], f(x) > 0$$

donc

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow u} f(x) = f(u) \\ \lim_{x \rightarrow u} f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Donc, $f(u) \geq 0$ donc $f(u) = 0$

□

Preuve (du théorème):

On pose $g : x \mapsto f(x) - y$. g est continue sur I .

$$\text{Si } f(a) < f(b) \text{ alors } \begin{cases} g(a) \leq 0 \\ g(b) \geq 0 \end{cases}$$

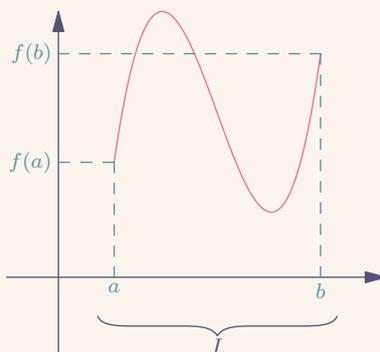
D'après le lemme, il existe $x \in [a, b]$ tel que $g(x) = 0$ et donc $f(x) = y$

$$\text{Si } f(a) < f(b) \text{ alors } \begin{cases} h(a) \leq 0 \\ h(b) \geq 0 \end{cases} \text{ où } h : x \mapsto -g(x) = y - f(x) \text{ est continue}$$

D'après le lemme, il existe $x \in [a, b]$ tel que $h(x) = 0$ et donc $f(x) = y$

□

Corollaire: Soit f continue sur un intervalle I . Alors, $f(I)$ est un intervalle.



Preuve:

Montrons que $f(I)$ est convexe

Soit $\alpha \in f(I), \beta \in f(I)$ avec $\alpha < \beta$. Montrons que

$$\forall \gamma \in [\alpha, \beta], f(\gamma) \in f(I)$$

$$\text{Or, } \begin{cases} \alpha \in f(I) \exists a \in I, \alpha = f(a) \\ \beta \in f(I) \exists b \in I, \beta = f(b) \end{cases}$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [a, b]$ tel que $\gamma = f(x)$ donc, $f(\gamma) \in f(I)$ □

Corollaire: On peut généraliser le théorème des valeurs intermédiaires au cas où

$$\begin{cases} a \in \overline{\mathbb{R}} \\ b \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{en remplaçant } f(a) \text{ par } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ et } f(b) \text{ par } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

□

Théorème (Théorème de la bijection): Soit f continue, strictement monotone sur un intervalle I . Alors, $J = f(I)$ est un intervalle de même nature (ouvert, semi-ouvert ou fermé) et f établit une bijection de I sur J .

Preuve:

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, J est un intervalle. f est strictement monotone donc f injective. Donc f établit une bijection de I sur J .

CAS 1 $I = [a, b]$ et f croissante

$$\forall x \in I, a \leq x \leq b$$

$$\text{donc } \forall x \in I, f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

$$\text{donc } J \subset [f(a), f(b)]$$

Or, $[f(a), f(b)] \subset J$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$\text{Donc } J = [f(a), f(b)]$$

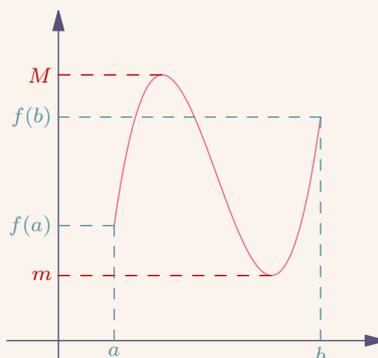
Les autres cas se démontrent de la même façon.

□

Théorème: Soit f continue sur un segment $[a, b]$. Alors, f est bornée et atteint ses bornes, i.e.

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, f([a, b]) = [m, M]$$

△ On peut avoir $m \neq f(a)$ et $M \neq f(b)$



Preuve:

On suppose que f n'est pas majorée :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in [a, b], f(x) \geq M$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b], f(x_n) \geq n$$

Donc, $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par a et majorée par b donc bornée.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On pose $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)}$. On a bien $\ell \in [a, b]$ et $f(\ell) =$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)})$ par continuité de f .

Or, $(f(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(f(x_n))$ donc $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$: une contradiction

Donc f est majorée et on pose

$$M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$$

On prouve de même que f est minorée. On pose donc

$$m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$$

Soit $(y_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ telle que $f(y_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} M$.

(y_n) est bornée donc il existe une sous-suite $(y_{\psi(n)})$ de (y_n) convergente. On pose $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\psi(n)} \in [a, b]$

Comme f continue sur y ,

$$f(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_{\psi(n)})$$

Or, $(f(y_{\psi(n)}))$ est une sous-suite de $(f(y_n))$ donc

$$M = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_{\psi(n)})$$

Par unicité de la limite, $M = f(y)$

Donc, $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$. De même, $m \in f([a, b])$

Enfin, en posant $\begin{cases} M = f(y) & \text{avec } y \in [a, b] \\ m = f(z) & \text{avec } z \in [a, b] \end{cases}$, on obtient

$$[m, M] = [f(z), f(y)] \underbrace{\subset}_{\text{théorème des valeurs intermédiaires}} f([a, b]) \underbrace{\subset}_{\substack{m \text{ minimum} \\ M \text{ maximum}}} [m, M]$$

donc $f([a, b]) = [m, M]$ □

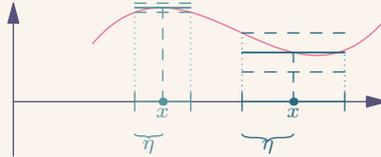
Deuxième partie

Continuité uniforme

REMARQUE:

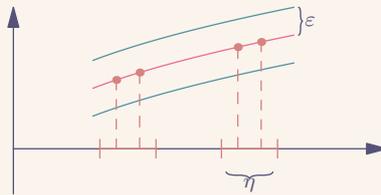
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in]x - \eta, x + \eta[, |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Ici, η dépend de ε et de x 

Dans certaines situations, il serait préférable d'avoir

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$



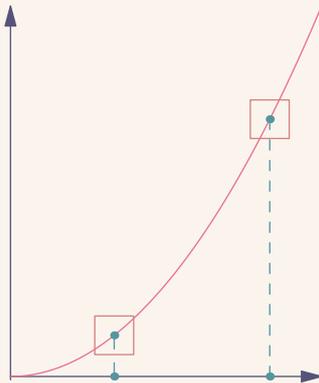
Lemme: Soit f uniformément continue sur un intervalle I . Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'éléments dans I telles que $x_n - y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$ □

EXEMPLE:

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$



On pose $\forall n \in \mathbb{N}_*, \begin{cases} x_n = n \\ y_n = n + \frac{1}{n} \end{cases}$. On a bien $\forall n \in \mathbb{N}_*, x_n - y_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, x_n^2 - y_n^2 = n^2 - \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 = n^2 - n^2 - \frac{1}{n^2} - 2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -2 \neq 0$$

Donc, f n'est pas uniformément continue.

Théorème (Théorème de Heine): Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors, f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Preuve:

On suppose f continue sur $[a, b]$ mais pas uniformément continue.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x, y) \in [a, b]^2 \text{ avec } |x - y| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$ comme ci-dessus. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (x_n, y_n) \in [a, b]^2 \text{ avec } \left| x_n - y_n \leq \frac{1}{n+1} \right| \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$$

(x_n) est bornée donc il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) convergente. On note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} \in [a, b]$ ($y_{\varphi(n)}$) est bornée, ($y_{\varphi(n)}$) a une sous-suite $(y_{\varphi(\psi(n))})$ convergente. On pose $\ell' = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\varphi(\psi(n))}$. $(x_{\varphi(\psi(n))})_{n \in \mathbb{N}}$ est une autre sous-suite de $(x_{\varphi(n)})$ donc $x_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_{\varphi(\psi(n))} - y_{\varphi(\psi(n))}| \leq \frac{1}{\varphi(\psi(n)) + 1}$$

On a vu que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(\psi(n)) \geq n$$

car $\varphi \circ \psi$ est strictement croissante à valeurs dans \mathbb{N} .

Donc, $x_{\varphi(\psi(n))} - y_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit que $\ell - \ell' = 0$. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(x_{\varphi(\psi(n))}) - f(y_{\varphi(\psi(n))})| > \varepsilon$$

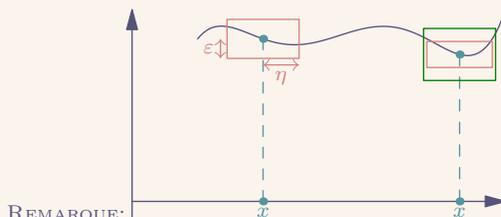
En passant à la limite,

$$0 = |f(\ell) - f(\ell)| > \varepsilon > 0$$

car f continue en ℓ

On a obtenu une contradiction. ζ

□



$$\begin{cases} \eta > 0 \\ \varepsilon > 0 \\ |x - y| \leq \eta \\ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Définition: Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle et $k \in \mathbb{R}$. On dit que f est k -lipschitzienne si

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

On dit que f est lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que f soit k -lipschitzienne.

Proposition: Soit f une fonction lipschitzienne sur I . Alors, f est uniformément continue sur I donc continue sur I .

Preuve:

Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Si $k = 0$ alors f est constante donc uniformément continue.

On suppose $k \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\eta = \frac{\varepsilon}{k} > 0$ car $k > 0$.

ne dépend pas de x

Soit $(x, y) \in I^2$. On suppose $|x - y| \leq \eta$. Alors,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \leq k\eta = \varepsilon$$

□

EXEMPLE:

$x \mapsto |x|$ est 1-lipschitzienne sur \mathbb{R} .

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

(inégalité triangulaire)

Théorème: Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leq M$$

Alors

$$\forall (a, b) \in I^2, |f(a) - f(b)| \leq M|a - b|$$

donc f est M -lipschitzienne.

Corollaire: Soit f de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$. Alors f est lipschitzienne.

Preuve:

f' est continue sur un segment donc bornée.

□

EXEMPLE:

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \sqrt{x}$$

$$\forall x > 0, |f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

Par contre,

$$\forall x \geq 1, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

Donc f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur $[1, +\infty[$ donc uniformément continue sur $[1, +\infty[$.

f est continue sur $[0, 1]$ donc uniformément continue sur $[0, 1]$ (théorème de Heine).

Soit $\varepsilon > 0$. Soient $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}_*^+$ tels que

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in [0, 1]^2, |x - y| \leq \eta_1 \implies |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall (x, y) \in [1, +\infty[^2, |x - y| \leq \eta_2 \implies |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

On pose $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$. On suppose $|x - y| \leq \eta$

$$\text{CAS 1 } \begin{cases} x \leq 1 \\ y \leq 1 \end{cases}$$

Alors, $|x - y| \leq \eta \leq \eta_1$ donc $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$

$$\text{CAS 2 } \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

Alors, $|x - y| \leq \eta \leq \eta_2$ donc $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$

$$\text{CAS 3 } x \leq 1 \leq y$$

$$\begin{aligned} |\sqrt{x} - \sqrt{y}| &= |\sqrt{x} - \sqrt{1} + \sqrt{1} - \sqrt{y}| \\ &\leq |\sqrt{x} - \sqrt{1}| + |\sqrt{y} - \sqrt{1}| \end{aligned}$$

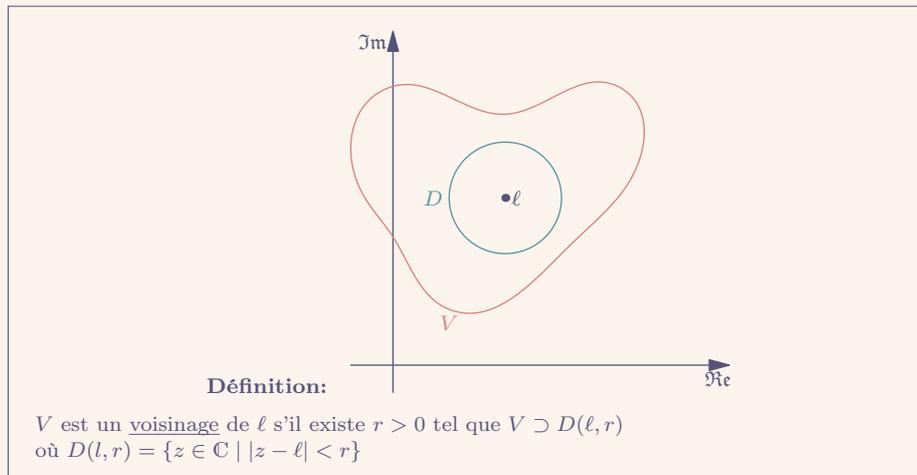
$$|x - 1| \leq |x - y| \leq \eta \leq \eta_1 \text{ donc } |\sqrt{x} - \sqrt{1}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|y - 1| \leq |x - y| \leq \eta \leq \eta_2 \text{ donc } |\sqrt{y} - \sqrt{1}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Donc } |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Troisième partie

Fonctions à valeurs dans \mathbb{C}



Proposition: Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ et $a \in I, \ell \in \mathbb{C}$.

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \iff \begin{cases} \Re(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \Re(\ell) \\ \Im(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \Im(\ell) \end{cases}$$

□

REMARQUE (Rappel):

On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, |f(x)| \leq M$$

Quatrième partie

Annexe

Théorème: *Théorème 2.11*

$f : I \rightarrow J$ bijective monotone avec I et J deux intervalles.
Alors, f^{-1} est continue (et f aussi)

Preuve:

f monotone donc $f(I) = J$
donc f continue (d'après 2.10).
 f^{-1} monotone, $f^{-1}(J) = I$
donc f^{-1} est continue □

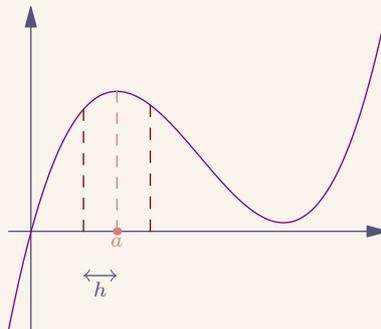
Définition: Un homéomorphisme est une application bijective, continue dont la réciproque est continue.

REMARQUE:

Preuve du programme de colle

Preuve:

$$\exists \eta > 0, \forall h \in]-\eta, +\eta[, f(a) \geq f(a+h)$$



$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ >}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0 \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ <}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0 \end{aligned}$$

Donc, $f'(a) = 0$ □