Chapitre 16

# Dérivation

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

# TABLE DES MATIÈRES

## Première partie

# Définition et premières propriétés

Dans ce paragraphe, $f$ désigne une fonction définie sur un intervalle ouvert non vide $I$ à valeurs réelles.

**Définition:** Soit $a \in I$. On dit que $f$ est dérivable en $a$ si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite qui est finie quand $x \to a$.
Dans ce cas, cette limite est notée $f'(a)$ et est appelée nombre dérivée de $f$ en $a$
On dit que $f$ est dérivable sur $I$ si $f$ est dérivable en tout $a \in I$.
L'application $\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & f'(a) \end{array}$ est la dérivée de $f$ et est notée $f'$

**Proposition:**

$f$ est dérivable en $a$ $\iff$ $f$ a un développement limité d'ordre 1 au voisinage de $a$

*Preuve:* " $\Longrightarrow$ " $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + \underset{x \to a}{o}(1)$

donc $f(x) - f(a) = (x-a)f'(a) + \underset{x \to a}{o}(x-a)$

donc $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \underset{x \to a}{o}(x-a)$

" $\Longleftarrow$ " $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \underset{x \to a}{o}(x-a)$

Alors, avec $x = a$, $a_0 = f(a)$ et donc

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{a_1(x-a) + o(x-a)}{x-a} = a_1 + o(1) \xrightarrow[x \to a]{} a_1 \in \mathbb{R}$$

$\square$

**Proposition:** Si $f$ est dérivable en $a$ alors $f$ est continue en $a$.

*Preuve:*

$$\forall x, f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x \to a}{o}(x-a)$$

donc

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x) = f(a) + f'(a) \times 0 + 0 = f(a)$$

$\square$

**Proposition:** Soients $f$ et $g$ dérivables en $a$

1. $f+g$ est dérivable en $a$ et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2. $f \times g$ est dérivable en $a$ et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

3. Si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en $a$ et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

*Preuve:*

$$\begin{cases} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) \\ g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + o(x-a) \end{cases}$$

$$f(x) + g(x) = f(a) + g(a) + (x-a)\underbrace{\left(f'(a) + g'(a)\right)}_{(f+g)'(a)} + o(x-a)$$

2.
$$f(x) \times g(x) = f(a)g(a) + (x-a)\underbrace{\left(f(a)g'(a) + g(a)f'(a)\right)}_{(fg)'(a)} + o(x-a)$$

3. On suppose $g(a) \neq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g(x)} &= \frac{1}{g(a) + (x-a)g'(a) + o(x-a)} \\
&= \frac{1}{g(a)} \times \frac{1}{1 + (x-a)\frac{g'(a)}{g(a)} + o(x-a)} \\
&= \frac{1}{g(a)} \times \left(1 - (x-a)\frac{g'(a)}{g(a)} + o(x-a)\right)
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{1}{g(a)}\left(f(a) + (x-a)\left(-\frac{f(a)g'(a)}{g(a)} + f'(a)\right)\right) o(x-a) \\
&= \frac{f(a)}{g(a)} + (x-a)\frac{-f(a)g'(a) + f'(a)g(a)}{(g(a))^2} + o(x-a)
\end{aligned}$$

□

**Proposition:** Soit $f$ dérivable en $a$ et $g$ dérivable en $f(a)$. Alors, $f \circ g$ est dérivable en $a$ et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

*Preuve:*

$$\begin{cases} \forall x, f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \underset{x \to a}{o}(x-a) \\ \forall y, g(y) = g(f(a)) + (y - f(a))g'(f(a)) + \underset{y \to f(a)}{o}(y \to f(a)) \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + (f(x)-f(a))g'(f(a)) + \underset{x\to a}{o}(f(x)-f(a)) \text{ car } f \text{ est continue en } a \\ &= g(f(a)) + (x-a)f'(a)g'(f(a)) + \underset{x\to a}{o}\Big((x-a)f'(a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)\Big) \\ &= g(f(a)) + (x-a)f'(a)g'(f(a)) + \underset{x\to a}{o}(x-a) \end{aligned}$$

□

**Proposition:** On suppose que $f$ est bijective dérivable en $a$ et $f'(a) \neq 0$. Si $f^{-1}$ est continue, alors $f^{-1}$ est dérivable en $f(a)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

*Preuve:*
$\forall y \neq f(a)$ on pose $x = f^{-1}(y)$.
$y \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$ et $x \xrightarrow[y\to f(a)]{} a$

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \frac{x-a}{f(x)-f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{1}{f'(a)}$$

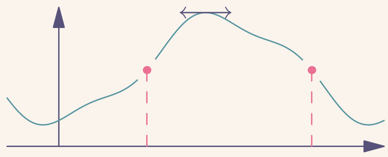
□

Deuxième partie

# Théorème de Rolle et accroissements finis

**Théorème** (Théorème de Rolle)**:** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$.
Alors,

$$\exists c \in ]a, b[, f'(c) = 0$$



*Preuve:*
$f$ est continue sur le segment $[a, b]$. On pose

$$\begin{cases} M = \max\limits_{[a,b]}(f) \\ m = \min\limits_{[a,b]}(f) \end{cases}$$

Cas 1

$$\exists c \in ]a, b[, M = f(c)$$

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{\substack{x \to c \\ <}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0 \text{ car } \forall x < c, \begin{cases} f(x) - f(c) \leqslant 0 \\ x - c < 0 \end{cases} \\ &= \lim_{\substack{x \to c \\ >}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0 \text{ car } \forall x > c, \begin{cases} f(x) - f(c) \leqslant 0 \\ x - c > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, $f'(c) = 0$
Cas 2

$$\exists c \in ]a, b[, m = f(c)$$

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{\substack{x \to c \\ <}} \leqslant 0 \text{ car } \forall x < c \begin{cases} f(x) - f(c) \geqslant 0 \\ x - c < 0 \end{cases} \\ &= \lim_{\substack{x \to c \\ >}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Donc $f'(c) = 0$
Cas 3

$$\forall c \in ]a, b[, f(c) \notin \{m, M\}$$

Alors

$$\begin{cases} M \in \{f(a), f(b)\} \\ m \in \{f(a), f(b)\} \end{cases}$$

Or, $f(a) = f(b)$ donc $M = m$ donc $f$ est constante donc

$$\forall x \in [a, b], f'(x) = 0$$

□

**Définition:** On dit que $f$ présente un <u>maximum local</u> en $a$ s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in ]a-\eta, a+\eta[, f(x) \leqslant f(a)$$

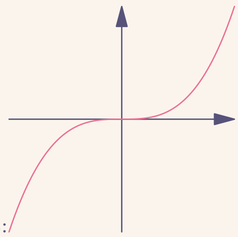
et un <u>minimum local</u> en $a$ s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in ]a-\eta, a+\eta[, f(x) \geqslant f(a)$$

Un <u>extremum local</u> est un minimum local ou un maximum local.

**Proposition:** Soit $a \in I$ tel que $f(a)$ est un extremum local de $f$ où $f$ est dérivable en $a$. Alors, $f'(a) = 0$ □

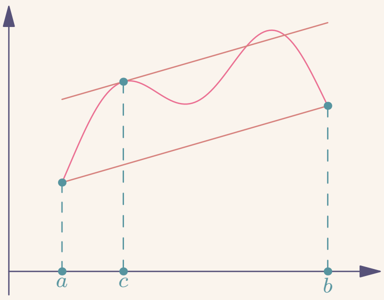
**Définition:** Soit $f$ dérivable et $a \in I$. On dit que $a$ est un <u>point critique</u> de $f$ si $f'(a) = 0$. On dit que $f(a)$ est une <u>valeur critique</u>.

EXEMPLE: 

$x \mapsto x^3$
$f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum local

**Théorème** (Théorème des accroissements finis)**:** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Alors, il existe $c \in ]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$




*Preuve:*
On pose $\tau = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
$g : x \mapsto f(x) - \tau x$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

$g(a) - g(b) = f(a) - f(b) - \tau(a-b) = 0$
D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in ]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.

$$\forall x, g'(x) = f'(x) - \tau$$

Donc, $f'(c) = \tau$ □

**Proposition:** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable avec $I$ un intervalle non vide.

1. $f$ est croissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$
2. $f$ est décroissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \leqslant 0$
3. $\forall x \in I, f'(x) > 0 \implies f$ strictement croissante
4. $\forall x \in I, f'(x) < 0 \implies f$ strictement décroissante
5. $f$ constante $\iff \forall x \in I, f'(x) = 0$

*Preuve:* 1. " $\implies$ " On suppose $f$ croissante.
Soit $x \in I$.

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Or, $\forall y, f(y) - f(x)$ et $y - x$ sont de même signe donc $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0$.
Et donc $f'(x) \geqslant 0$.
" $\impliedby$ " On suppose que

$$\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$$

Soit $(a,b) \in I^2$. On suppose que $a \leqslant b$.
$f$ est continue sur $[a,b]$
$f$ est dérivable sur $]a,b[$
donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in ]a,b[$ tel que

$$f(a) - f(b) = \underbrace{f'(c)}_{\geqslant 0} \underbrace{(a-b)}_{\leqslant 0} \leqslant 0$$

donc $f(a) \leqslant f(b)$
Donc $f$ est croissante.

On procède de la même manière pour les autres propositions □

**Théorème** (Théorème de la limite de la dérivée)**:** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue (sur $I$), $a \in I$. On suppose $f$ dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} f'(x)$ existe.

Alors,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[\substack{x \to a \\ \neq}]{} \lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f'(a)$$

*Preuve:*
On pose $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} f'(x) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Soit $x \in I \setminus \{a\}$.
$f$ est continue sur $I$ donc sur $[a,x]$ si $x \geqslant a$ et sur $[x,a]$ si $x < a$
$f$ est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ donc sur $]a,x[$ si $x > a$ et sur $]x,a[$ si $x < a$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in ]a, x[ \cup ]x, a[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$$

- $\forall x < a$, on a $x < c_x < a$
  Par encadrement, $c_x \xrightarrow[\substack{x \to a \\ <}]{} a$
- $\forall x > a$, on a $x > c_x > a$
  Par encadrement, $c_x \xrightarrow[\substack{x \to a \\ >}]{} a$

Donc,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} c_x = a$$

donc

$$f'(c_x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ \neq}]{} \ell$$

(compositions des limites)

$\square$

**Proposition:** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \left|f'(x)\right| \leqslant M$$

Alors $f$ est $M$-lipschitzienne sur $I$.

*Preuve:*
Soient $(a, b) \in I^2$.
D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in I$ tel que

$$f(a) - f(b) = f'(c)(a - b)$$

donc

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &= \left|f'(c)\right| |a - b| \\ &\leqslant M\, |a - b| \end{aligned}$$

$\square$

## Troisième partie

# Dérivées $n$-ièmes

**Définition:** On dit que $f$ est une fois dérivable si $f$ est dérivable. Dans ce cas, on note $f^{(1)}$ la fonction $f'$.
Pour $n \in \mathbb{N}_*$, on dit que $f$ est dérivable $n$ fois si $f$ est dérivable $n-1$ fois et $f^{(n-1)}$ est dérivable une fois. Dans ce cas, $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Remarque (Convention):

$$f^{(0)} = f$$

**Définition:** $f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ si $f$ est dérivables $n$ fois et $f^{(n)}$ est continue.

**Proposition:** Soit $f$ dérivable $n$ fois et $k \leqslant n$.
Alors $f$ est dérivables $k$ fois et $f^{(n)} = \left(f^{(k)}\right)^{(n-k)}$ □

**Proposition:** Soit $f$ et $g$ deux fonctions dérivables $n$ fois en $a$.
Alors, $f+g$ est dérivable $n$ fois en $a$ et

$$(f+g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$$

Si $f$ et $g$ sont de classe $\mathscr{C}^n$, alors, $f+g$ est de classe $\mathscr{C}^n$

*Preuve* (Récurrence immédiate sur $n$ )*:* □

**Proposition** (Leibniz)**:** Soient $f$ et $g$ dérivables $n$ fois en $a$. Alors, $f \times g$ est dérivables $n$ fois en $a$. et

$$(*) : \qquad (f \times g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

Si $f$ et $g$ sont de classe $\mathscr{C}^n$ alors $f \times g$ est de classe $\mathscr{C}^n$.

*Preuve* (par récurrence sur $n$ )*:* — Soient $f$ et $g$ deux fonctions

$$(f \times g)^{(0)}(a) = (f \times g)(a) = f(a)g(a)$$

et

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a) = f^{(0)}(a) g^{(0)}(a) = f(a)g(a)$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $(*)$ vraie quelles que soient les fonctions $f$ et $g$ dérivables $n$ fois en $a$.
Soient $f$ et $g$ dérivables $n-1$ fois en $a$. En particulier, elles sont dérivables $n$ fois en $a$. Donc

$$(f \times g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\begin{cases} f^{(k)} \text{ est dérivables en } a \\ g^{(n-k)} \text{ est dérivables en } a \end{cases}$$

Donc, $(f \times g)^{(n)}$ est dérivable en $a$ donc $f \times g$ est dérivables $n+1$ fois en $a$.

$$\begin{aligned}
(f \times g)^{(n+1)}(a) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left( f^{(k+1)}(a) g^{(n-k)}(a) + f^{(k)}(a) g^{(n-k+1)}(a) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(a) \times g^{(n-k+1)}(a) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k+1)}(a) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(a) g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)}(a) g(a) + f(a) g^{(n+1)}(a) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(a) g^{(n+1-k)}(a)
\end{aligned}$$

□

**Proposition:** Soient $f$ et $g$ dérivables $n$ fois (resp. de classe $\mathscr{C}^n$). On suppose $g(a) \neq 0$. Alors, $\dfrac{f}{g}$ est dérivables $n$ fois (resp. $\mathscr{C}^n$) en $a$.

*Preuve* (par récurrence sur $n$)*:*
Le résultat est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour toutes fonctions $f$ et $g$ dérivables $n$ fois en $a$ avec $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est aussi dérivables $n$ fois en $a$.
Soient $f$ et $g$ dérivables $n+1$ fois en $a$ telles que $g(a) \neq 0$. Alors, $\dfrac{f}{g}$ dérivable en $a$. et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

- $f'$ est dérivables $n$ fois en $a$
- $g$ est dérivables $n$ fois en $a$
- $f$ est dérivables $n$ fois en $a$
- $g'$ est dérivables $n$ fois en $a$

Donc, $f' \times g - f \times g'$ et $g^2$ sont dérivables $n$ fois en $a$ et $g(a)^2 \neq 0$
D'après l'hypothèse de récurrence, $\dfrac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$ est dérivable $n$ fois en $a$ donc $\dfrac{f}{g}$ dérivable $n+1$ fois en $a$ □

**Proposition:** Soit $f$ dérivable $n$ fois en $a$ et $g$ dérivable $n$ fois en $f(a)$ (resp. $f$ et $g$ de classe $\mathscr{C}^n$).
Alors, $g \circ f$ est dérivable $n$ fois en $a$ (resp. de classe $\mathscr{C}^n$).

*Preuve* (similaire à la précédente)*:*

□

**Définition:** On dit que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si $f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, i.e. $f$ est dérivable une infinité de fois.

**Proposition** (formule de Taylor avec reste intégral)**:** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et $a \in I$. Alors

$$(*) \qquad \forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\ dt$$

*Preuve* (par récurrence sur $n$)*:* — Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $a \in I$. Soit $x \in I$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x f^{(1)}(t)\frac{(x-t)^0}{0!}\ dt &= f(a) + \int_a^x f'(t)\ dt \\ &= f(a) + f(x) - f(a) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(*)$ est vraie pour toute fonction $f$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $I \ni a$. Soit $f$ de classe $\mathscr{C}^{n+2}$. Alors, $f$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ donc

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\ dt$$

Soit $x \in I$. On pose $\begin{cases} u : t \mapsto -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \\ v = f^{(n+1)} \end{cases}$

Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ donc

$$\int_a^x u'(t)v(t)\ dt = [u(t)v(t)]_a^x - \int_a^x u(t)v'(t)\ dt$$

donc

$$\int_a^x f^{(n+1)}(t)\ dt = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ dt$$

D'où,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a) + \int_a^x f^{(x+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ dt$$

$\square$

**Proposition** (Inégalité de Taylor-Lagrange)**:** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M$$

Alors, pour tout $a \in I$,

$$\forall x \in I, \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right| \leqslant M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

*Preuve:*
D'après la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\begin{aligned}\forall x \in I, \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} \right| &= \left| \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} \; dt \right| \\ &\leqslant \left| \int_a^x \left| f^{(n+1)} \right| (t) \frac{|x-t|^n}{n!} \; dt \right| \\ &\leqslant \left| \int_a^x M \frac{|x-t|^n}{n!} \; dt \right|\end{aligned}$$

On suppose $x \geqslant a$.

$$\begin{aligned}\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| &\leqslant M \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \; dt = M \left[ -\frac{x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_a^x \\ &\leqslant M \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

On suppose $x \leqslant a$.

$$\begin{aligned}\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| &\leqslant M \int_x^a \frac{(t-x)^n}{n!} \; dt \\ &\leqslant M \left[ \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_x^a \\ &\leqslant M \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} = M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

□

Exemple:

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

On pose

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x \end{aligned}$$

. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a = 0$.
$f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $I = [0, x]$

$$\forall t \in I, \left| f^{(n+1)}(t) \right| = \left| e^t \right| = e^t \leqslant e^x$$

$$\forall t \in I, \left| e^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \right| \leqslant e^x \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc

$$\forall t \in I, \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = e^t$$

donc

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Exercice:

Montrer que $\ln 2 = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

# Quatrième partie

# Fonctions à valeurs complexes

**Définition:** Soient $f : I \to \mathbb{C}$, ($I$ intervalle de $\mathbb{R}$) et $a \in I$.
$f$ est dérivable en $a$ si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{C}$

**Proposition:**

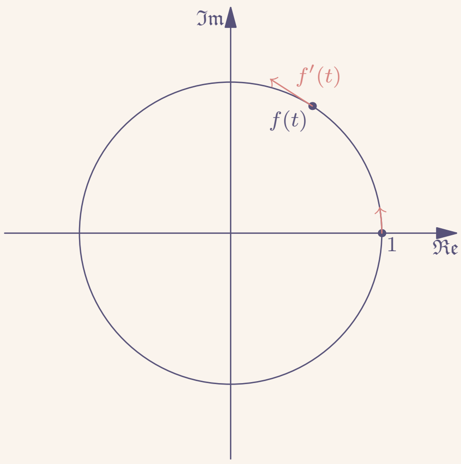
$$f \text{ est dérivable en } a \iff \mathfrak{Re}(f) \text{ et } \mathfrak{Im}(f) \text{ sont dérivables en } a$$

Dans ce cas, $f'(a) = \mathfrak{Re}(f)'(a) + i\mathfrak{Im}(f)'(a)$ □

**Proposition:** La somme, le produit, de fonctions dérivables sont dérivables ; le quotient également si le dénominateur ne s'annule pas. □

**Proposition:** idem avec les dérivées $n$-ièmes □

Remarque (Attention ⚠):
Le théorème de Rolle n'est plus vraie.




$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{it} \end{aligned}$$

$f(0) = f(2\pi) = 1$
$f$ est continue sur $[0, 2\pi]$ et dérivable sur $]0, 2\pi[$
$\forall t, f'(t) = ie^{it} \neq 0$

**Proposition:** La formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange sont aussi vrais dans $\mathbb{C}$. □