Chapitre 17

Dimension finie

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie si E a au moins une famille génératrice finie. On dit que E est de dimension infinie sinon.

Théorème (Théorème de la base extraite)**:** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie. Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E. Alors, il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{E}$ telle que $\mathscr{B} \subset \mathscr{G}$.

Preuve (par récurrence sur $\#G = \mathrm{Card}(G)$)*:*

— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul engendré par $\mathscr{G} = (u)$.
Si $u = 0_E$, alors $E = \{0_E\}$: une contradiction $\lightning$
Donc $u \neq 0_E$ donc (u) est libre. En effet,

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u = 0_E \implies \lambda = 0_{\mathbb{K}}$$

Donc $\mathscr{G}$ est une base de E.

— Soit $n \in \mathbb{N}_*$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose que si E a une famille génératrice constituée de n vecteurs, alors on peut extraire de cette famille une base de E.
Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E avec $n+1$ vecteurs.
Si $\mathscr{G}$ est libre, alors $\mathscr{G}$ est une base de E.
Si $\mathscr{G}$ n'est pas libre, alors il existe $u \in \mathscr{G}$ tel que $u \in \mathrm{Vect}(\mathscr{G} \setminus \{u\})$
Donc $\mathscr{G} \setminus \{u\}$ engendre E. Or, $\mathscr{G} \setminus \{u\}$ possède n vecteurs. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$\mathscr{B} \subset \mathscr{G} \setminus \{u\} \subset \mathscr{G}$$

□

Corollaire: Tout espace de dimension finie a une base. □

Théorème (Théorème de la base incomplète)**:** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E. $\mathscr{L}$ une famille libre de E. Alors, il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \text{ et } \mathscr{B} \setminus \mathscr{L} \subset \mathscr{G}$$

Preuve (par récurrence sur $\#(\mathscr{G} \setminus \mathscr{L})$)*:*

— Avec les notations précédentes, on suppose que $\mathscr{G} \setminus \mathscr{L} \neq \varnothing$

$$\forall u \in \mathscr{G}, u \in \mathscr{L}$$

Donc $\mathscr{G} \subset \mathscr{L}$ donc $\mathscr{L}$ est génératrice donc $\mathscr{L}$ est une base de E. On pose $\mathscr{B} = \mathscr{L}$ et alors

$$\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \text{ et } \mathscr{B} \setminus \mathscr{L} = \varnothing \subset \mathscr{G}$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que si $\mathscr{G}$ est génératrice et $\mathscr{L}$ libre avec $\#(\mathscr{G} \setminus \mathscr{L}) = n$ alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \text{ et } \mathscr{B} \setminus \mathscr{L} \subset \mathscr{G}$$

Soient à présent $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E et $\mathscr{L}$ une famille libre de E telles que $\#(\mathscr{G} \setminus \mathscr{L}) = n+1 > 0$
Si $\mathscr{L}$ engendre E, alors $\mathscr{L}$ est une base de E. On pose $\mathscr{B} = \mathscr{L}$ et on a bien

$$\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \text{ et } \mathscr{B} \setminus \mathscr{L} = \varnothing \subset \mathscr{G}$$

On suppose que $\mathscr{L}$ n'engendre pas E. Il existe $u \in \mathscr{G}$ tel que $u \notin \overrightarrow{(}\mathscr{L})$ (car sinon, $\mathscr{G} \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{L})$ et donc $\underbrace{\mathrm{Vect}(\mathscr{G})}_{=E} \subset \underbrace{\mathrm{Vect}(\mathscr{L})}_{\subset E}$
Donc $\mathscr{L} \cup \{u\}$ est libre. On pose $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{u\}$

$$\mathscr{G} \setminus \mathscr{L}' = \mathscr{G} \setminus (\mathscr{L} \cup \{u\}) = (\mathscr{G} \setminus \mathscr{L}) \setminus \{u\}$$

donc $\#(\mathscr{G} \setminus \mathscr{L}') = n+1-1 = n$
D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $\mathscr{B}$ une base de E telle que

$$\mathscr{L} \subset \mathscr{L}' \subset \mathscr{B} \text{ et } \mathscr{B} \setminus \mathscr{L}' \subset \mathscr{G}$$

$$\mathscr{B} \setminus \mathscr{L} = \underbrace{\mathscr{B} \setminus \mathscr{L}'}_{\subset \mathscr{G}} \cup \underbrace{\{u\}}_{\subset \mathscr{G} \text{ car } u \in \mathscr{G}}$$

On a $\mathscr{B} \setminus \mathscr{L} \subset \mathscr{G}$

□

Théorème: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E ont le même cardinal.

Preuve:
Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E et $\mathscr{B} \subset \mathscr{G}$ une base de E. On note $n = \#\mathscr{B}$
Soit $\mathscr{B}'$ une base de E. On pose $p = n - \#(\mathscr{B} \cap \mathscr{B}')$. Montrons par récurrence sur p que $\#\mathscr{B} = \#\mathscr{B}'$

- On suppose que $p = 0$. Alors, $\#(\mathscr{B} \cap \mathscr{B}') = n$
  Or, $\mathscr{B}' \cap \mathscr{B} \subset \mathscr{B}$ donc $\mathscr{B} \cap \mathscr{B}' = \mathscr{B}$ donc $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}'$ et donc $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$
- Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que si $\mathscr{B}'$ est une base de E telle que $n - \#(\mathscr{B} \cap \mathscr{B}') = p$, alors $\#\mathscr{B}' = n$
  Aoit $\mathscr{B}'$ une base de E telle que $n - \#(\mathscr{B} \cap \mathscr{B}') = p+1 > 0$
  Donc $\mathscr{B} \cap \mathscr{B}' \neq \mathscr{B}$. Soit $u \in \mathscr{B}' \setminus \mathscr{B}$. D'après le lemme d'échange, il existe $v \in \mathscr{B} \setminus \mathscr{B}'$ tel que $\mathscr{B}' \setminus \{u\} \cup \{v\}$ est une base de E. On pose $\mathscr{B}'' = \mathscr{B}' \setminus \{u\} \cup \{v\}$

$$\begin{aligned} \mathscr{B}'' \cap \mathscr{B} &= \big((\mathscr{B}' \setminus \{u\}) \cap \mathscr{B}\big) \cup \{v\} \\ &= (\mathscr{B}' \cap \mathscr{B}) \cup \{v\} \end{aligned}$$

  donc,

$$\begin{aligned} n - \#(\mathscr{B}'' \cap \mathscr{B}) &= n - (\#(\mathscr{B}' \cap \mathscr{B}) + 1) \\ &= p + 1 - 1 \\ &= p \end{aligned}$$

  D'après l'hypothèse de récurrence,

$$\#\mathscr{B}'' = n$$

  Or, $\#\mathscr{B}'' = \#\mathscr{B}'$

□

Lemme: Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E telles que $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}'$. Alors, $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$.

Preuve:
On suppose $\mathscr{B}' \neq \mathscr{B}$. Soit $u \in \mathscr{B}' \setminus \mathscr{B}$ $u \in E = \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$ donc $\mathscr{B} \cup \{u\}$ n'est pas libre. Donc $\mathscr{B} \cup \{u\} \subset \mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}'$ est libre donc $\mathscr{B} \cup \{u\}$ est libre : une contradiction $\lightning$ □

Lemme (Lemme d'échange)**:** Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E et $u \in \mathscr{B}_1 \setminus \mathscr{B}_2$. Alors, il existe $v \in \mathscr{B}_2$ tel que $(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ soit une base de E.

Preuve (1^{nde} méthode)*:*
On suppose que pout tout $v \in \mathscr{B}_2$, $(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ n'est pas une base de E Soit $v \in \mathscr{B}_2$.

- Supposons $(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ non libre. $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}$ est libre. Donc $v \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$
- Supposons $(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ non génératrice. Comme $\mathscr{B}_1$ engendre E, $u \notin \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{v\})$. On suppose que $\mathscr{B}_1 \neq \mathscr{B}_2$. $\forall v \in \mathscr{B}_2 \setminus \mathscr{B}_1, \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{v\}) = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1) = E \ni u$ donc, $(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ engendre E et donc

  $$v \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$$

  On a aussi

  $$\forall v \in \mathscr{B}_1 \setminus \{u\}, v \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$$

  Comme $u \notin \mathscr{B}_2$, on a

  $$\forall v \in \mathscr{B}_2, v \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$$

  docn

  $$E = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_2) \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$$

  donc $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}$ engendre E donc $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}$ est une base de E. Or, $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} \subset \mathscr{B}_1$, donc $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} = \mathscr{B}_1$

□

Preuve (2^{nde} méthode)*:*
On suppose que pout tout $v \in \mathscr{B}_2$, $(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ n'est pas une base de E

- Comme $u \in \mathscr{B}_1 \setminus \mathscr{B}_2$, nécéssairement $\mathscr{B}_1 \neq \mathscr{B}_2$ donc $\mathscr{B}_2 \not\subset \mathscr{B}_1$, donc $\mathscr{B}_2 \setminus \mathscr{B}_1 \neq \varnothing$
- Soit $v \in \mathscr{B}_2 \setminus \mathscr{B}_1$. Il existe $(\lambda_w)_{w \in \mathscr{B}_1}$ une famille de scalaires presque nulle telle que

  $$v = \sum_{w \in \mathscr{B}_1} \lambda_w w - \lambda_u u + + \sum_{w \in \mathscr{B}_1 \setminus \{u\}} \lambda_w w$$

  Si $\lambda_u \neq 0_E$, alors

  $$u = \lambda_u^{-1} \left(v - \sum_{w \in \mathscr{B}_1 \setminus \{u\}} \lambda_w w \right)$$
  $$\in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} \cup v)$$

  donc $\mathscr{B}_1 \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} \cup \{v\})$
  et donc $E \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} \cup \{v\})$
  et donc $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} \cup \{v\}$ engendre E
  donc $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} \cup \{v\}$ n'est pas libre
  donc $v \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$ (car $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}$ est libre
  donc $\lambda_u = 0_{\mathbb{K}}$ $\lightning$
  ‘

Donc, $\lambda_u = 0_{\mathbb{K}}$, docn $v \in \text{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$
On vient de prouver que

$$\mathscr{B}_2 \setminus \mathscr{B}_1 \subset \text{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$$
$$\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} \subset \text{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$$

Comme $u \notin \mathscr{B}_2$,

$$\mathscr{B}_2 \subset \text{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$$

donc

$$E = \text{Vect}(\mathscr{B}_2) \subset \text{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$$

donc $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}$ engendre E. Donc, $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}$ est une base de E.
Or, $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} \subset \mathscr{B}_1$, donc $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} = \mathscr{B}_1$

□

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Le cardinal commun à toutes les bases de E est appelé dimension de E est notée $\dim(E)$ ou $\dim_{\mathbb{K}}(E)$
C'est donc aussi le nombre de coordonnées de n'importe quel vecteur dans n'importe quelle base.

Exemple:
1. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ et $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$
2. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$
3. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$

Corollaire: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{L}$ une famille libre de E, $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E. On note $n = \dim(E)$
1. $\#\mathscr{G} \geqslant n$ et ($\#\mathscr{G} = n \implies \mathscr{G}$ est une base de E)
2. $\#\mathscr{L} \leqslant n$ et ($\#\mathscr{L} = n \implies \mathscr{L}$ est une base de E)

Corollaire: $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est de dimension infinie. $\forall i \in \mathbb{N}, e_i : x \mapsto x^i$
$(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Proposition: Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $E\times F$ est de dimension finie et $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$

Preuve:
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F. On pose

$$\begin{cases} u_1 &= (e_1, 0_F) \\ u_2 &= (e_2, 0_F) \\ &\vdots \\ u_n &= (e_n, 0_F) \\ u_{n+1} &= (0_E, f_1) \\ u_{n+2} &= (0_E, f_2) \\ &\vdots \\ u_{n+p} &= (0_E, f_p) \end{cases}$$

Soit $(x,y) \in E \times F$.

$$\begin{cases} \exists (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \exists (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{j=1}^p y_j f_j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (x,y) &= \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^p y_j f_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i (e_i + 0_F) + \sum_{j=1}^p y_j (0_E, f_j) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i u_i + \sum_{j=1}^p y_j u_{n+j} \end{aligned}$$

Donc, $E \times F = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_{n+p})$ donc $E \times F$ est de dimension finie.
Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+p}) \in \mathbb{K}^{n+p}$ tel que

$$(*) : \quad \sum_{k=1}^{n+p} \lambda_k u_k = 0_{E\times F} = (0_E, 0_F)$$

$$\begin{aligned} (*) &\iff \sum_{k=1}^n \lambda_k (e_k, 0_F) + \sum_{k=n+1}^p \lambda_k (0_E, f_{k-n}) = (0_E, 0_F) \\ &\iff \begin{cases} \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0_E \\ \sum_{k=n+1}^p \lambda_k f_{k-n} = 0_F \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \forall k \in [\![1,n]\!], \lambda_k = 0_\mathbb{K} & (\text{car } (e_1,\dots,e_n) \text{ est libre}) \\ \forall k \in [\![n+1,n+p]\!], \lambda_k = 0_\mathbb{K} & (\text{car } (f_1,\dots,f_n) \text{ est libre}) \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $(u_1,\dots,u_{n+p})$ est une base de $E \times F$. Donc, $\dim(E \times F) = n + p = \dim(E) + \dim(F)$ □

Remarque (Convention):

$$\dim\big(\{0_E\}\big) = 0$$

Théorème: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E. Alors, F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$
Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$

Preuve:
On considère

$$A = \{k \in \mathbb{N} \mid \text{il existe une famille libre de } F \text{ à } k \text{ éléments}\}$$

On suppose $F \neq \{0_E\}$.
— Soit $u \in F \setminus \{0_E\}$. (u) est libre donc $1 \in A$ et donc $A \neq \varnothing$
— Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de F. Alors, $\mathscr{L}$ est une famille libre de E donc $\#\mathscr{L} \leqslant \dim(E)$

Donc A est majorée par $\dim(E)$
On en déduit que A a un plus grand élément p.

— Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de F avec p éléments.
Si $\mathscr{L}$ n'engendre pas F, alors il existe $u \in F$ tel que $u \notin \text{Vect}(\mathscr{L})$ et donc $\mathscr{L} \cup \{u\}$ est une famille libre de F, donc $p+1 \in A$ en contradiction avec la maximalité de p.
Donc $\mathscr{L}$ est une base de F donc F est de dimension finie et $\dim(F) = p \leqslant \dim(E)$

Soit $\mathscr{B}$ une base de F. Alors, $\mathscr{B}$ est aussi une famille de libre de de E. Donc $\#\mathscr{B} \leqslant \dim(E)$ donc $\dim(F) = \dim(E)$
Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $\mathscr{B}$ est une base de E, et donc $F = \text{Vect}(\mathscr{B}) = E$ $\square$

Proposition (Formule de Grassmann)**:** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espace vectoriels de E. Alors,

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Preuve:
Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $F \cap G$. $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille libre de F.
On complète $(e_1, \ldots, e_p)$ en une base $(e_1, \ldots, e_p, u_1, \ldots, u_q)$ de F.
De même, on complète $(e_1, \ldots, e_p)$ en une base $(e_1, \ldots, e_p, v_1, \ldots, v_r)$ de G.
On pose $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p, u_1, \ldots, u_q, v_1, \ldots, v_r)$. Montrons que $\mathscr{B}$ est une base de $F+G$

— Soit $u \in F+G$
On pose $u = v + w$ avec $\begin{cases} v \in F \\ w \in G \end{cases}$.
On pose $v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{q} \mu_i u_i$ avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \lambda_q) \in \mathbb{K}^{p+q}$
On pose aussi $w = \sum_{i=1}^{p} \lambda'_i e_i + \sum_{j=1}^{r} \nu_j v_j$ avec $(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_p, \nu_1, \ldots, \nu_r) \in \mathbb{K}^{p+r}$
D'où,
$$u = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + \lambda'_i) e_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j u_j + \sum_{k=1}^{r} \nu_k v_k \in \text{Vect}(\mathscr{B})$$

— Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q, \nu_1, \ldots, \nu_r) \in \mathbb{K}^{p+q+r}$.
On suppose
$$(*) \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j u_j + \sum_{k=1}^{r} \nu_k v_k = 0_E$$
D'où,
$$\underbrace{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j u_j}_{\in F} = \underbrace{-\sum_{k=1}^{r} \nu_j v_k}_{\in G}$$
Donc,
$$f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j u_j \in F \cap G$$
Comme $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de $F \cap G$, $\exists! (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que
$$f = \sum_{i=1}^{p} \lambda'_i e_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda'_i e_i + \sum_{j=1}^{q} 0_{\mathbb{K}} u_j$$

Comme $(e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_q)$ est une base de F,

$$\forall k \in [\![1, q]\!], \mu_j = 0_{\mathbb{K}}$$

De même,

$$\forall k \in [\![1, r]\!], \nu_k = 0_{\mathbb{K}}$$

On remplace dans $(*)$ pour trouver

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0_E$$

Comme $(e_1, \dots, e_p)$ est libre,

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre.
Donc,

$$\begin{aligned} \dim(F+G) &= p+q+r \\ &= (p+q)+(p+r)-p \\ &= \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G) \end{aligned}$$

□

Corollaire: Avec les hypothèse précédentes,

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases}$$

Preuve: " $\Longrightarrow$ " On suppose $E = F \oplus G$
Comme la somme est directe, $F \cap G = \{0_E\}$

$$\begin{aligned} \dim(E) &= \dim(F) \\ &= \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G) \\ &= \dim(F)+\dim(G) \end{aligned}$$

" $\Longleftarrow$ " On suppose $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.
On sait déjà que $F + G = F \oplus G$

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = \dim(E)$$

Donc $F + G = E$

□

Proposition: Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$

une base de F. L'application

$$f : \mathbb{K}^n \longrightarrow F$$
$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

est bijective.
Si $\mathbb{K}$ est infini, $\mathbb{K}^n$ aussi et donc F aussi.
Si $\#\mathbb{K} = p \in \mathbb{N}_*$,

$$\begin{array}{l} \#\mathbb{K}^n = p^n \\ \parallel \\ \#F \end{array}$$