Chapitre 20

TD

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

Table des matières

Exercice 2

6.

$$\begin{aligned}\frac{4}{(X^2+1)^2} &= \frac{4}{(X-i)^2(X+i^2)}\\ &= \frac{a}{X-i} + \frac{b}{(X-i)^2} + \frac{c}{X+i} + \frac{d}{(X+i)^2}\end{aligned}$$

avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$.

$$\frac{4}{(X+i)^2} = b + a(X-i) + (X-i)^2\left(\frac{c}{X+i} + \frac{d}{(X+i)^2}\right)$$

On remplace X par i :

$$-1 = \frac{4}{(2i)^2} = b$$

$$\frac{4}{(X-i)^2} = d + c(X+i) + (X+i)^2\left(\frac{a}{X-i} + \frac{b}{(X-i)^2}\right)$$

On remplace X par $-i$:

$$-1 = \frac{4}{(2i)^2} = d$$

donc

$$\frac{4}{(X-i)^2(X+i)^2} + \frac{1}{(X-i)^2} + \frac{1}{(X+i)^2} = \frac{a}{X-i} + \frac{c}{X+i}$$

donc

$$\frac{4+(X+i)^2+(X-i)^2}{(X-i)^2(X+i)^2} = \frac{a}{X-i} + \frac{c}{X+i}$$

donc

$$\frac{4+X^2+\cancel{2iX}-1+X^2-\cancel{2iX}-1}{(X-i)^2(X+i)^2} = \frac{a}{X-i} + \frac{b}{X+i}$$

donc

$$\frac{2\cancel{(X-i)}\cancel{(X+i)}}{(X-i)^{\cancel{2}}(X+i)^{\cancel{2}}} = \frac{a}{X-i} + \frac{c}{X+i}$$

donc

$$\frac{2}{(X-i)(X+i)} = \frac{a}{X-i} + \frac{c}{X+i}$$

donc

$$\frac{2}{X+i} = a + c\frac{X-i}{X+i}$$

et donc

$$-i = \frac{2}{2i} = a$$

On a aussi

$$\frac{2}{X-i} = c + a\frac{X+i}{X-i}$$

donc

$$i = \frac{2}{-2i} = c$$

Donc,

$$\frac{4}{(X^2+1)^2} = -\frac{i}{X-i} - \frac{1}{(X-i)^2} + \frac{i}{X+i} - \frac{1}{(X+i)^2}$$

3.

$$\frac{1}{X(X-1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2} \text{ avec } a, b, c \in \mathbb{C}$$

$a = 1$, $c = 1$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{X(X-1)^2} - \frac{1}{X} - \frac{1}{(X-1)^2} &= \frac{1-(X-1)^2 - X}{X(X-1)^2} \\
&= \frac{\cancel{1} - X^2 + 2X - \cancel{1} - X}{X(X-1)^2} \\
&= \frac{X(1-X)}{X(X-1)^2} \\
&= -\frac{1}{X-1} = \frac{b}{X-1}
\end{aligned}$$

Donc, $b = -1$.

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Une primitive de f est

$$x \mapsto \ln(|x|) - \ln(|x-1|) - \frac{1}{x-1}$$

9.

$$A = \frac{3}{(X^3-1)^2}$$

Racines du dénominateur : 1, j et j^2

$$A = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-j)^2} + \frac{d}{X-j} + \frac{e}{(X-j^2)^2} + \frac{f}{X-j^2}$$

On a $a = \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}
c &= \frac{3}{(X-1)^2(X-j^2)^2} \\
&= \frac{3}{(j-1)^2(j-j^2)^2} \\
&= \frac{3}{(j^2-2j+1)(j^2-2+j)} \\
&= \frac{3}{(-3j)(-3)} \\
&= \frac{1}{3j} = \frac{1}{3}j^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e &= \frac{3}{(j^2-1)^2(j^2-j)^2} \\
&= \frac{3}{(j-2j^2+1)(j-2+j^2)} \\
&= \frac{3}{(-3j^2)(-3)} \\
&= \frac{1}{3j^2} = \frac{1}{3}j
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{(X-1)^2} - \frac{a}{(X-1)^2} - \frac{c}{(X-j)^2} - \frac{e}{(X-j^2)^2} &= \frac{b}{X-1} + \frac{d}{X-j} + \frac{f}{X-j^2} \\
&= \frac{3 - \frac{1}{3}(X-j^2)(X-j^2)^2 - \frac{1}{3}j^2(X-1)^2(X-j^2)^2 - \frac{1}{3}j(X-1)^2(X-j)^2}{(X^3-1)^2} \\
&= -2\left(\frac{X^3-1}{(X^3-1)^2}\right) \\
&= -\frac{2}{X^3-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b &= -\frac{2}{(1-j)(1-j^2)} \\
d &= -\frac{2}{(j-1)(j-j^2)} = -2j \\
b &= -\frac{2}{(j^2-1)(j^2)} = -2j^2
\end{aligned}
$$

Exercice 5

1. $\deg\left(\frac{P''}{P}\right) < 0$.

$$\frac{P''}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{X - x_i}$$

donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!], a_i = \frac{P''(x_i)}{P'(x_i)}.$$

2.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)}.$$

donc

$$\frac{P''}{P} = \lambda \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{j \neq i}^{n} (X - x_j)}{P} \qquad \lambda \in \mathbb{C}^*$$

Les coefficiants de X^{n-1} est $\sum_{i=1}^{n} a_i$ en développant l'expression.

Or,

$$\deg(P'') < n - 1$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$$

Exercice 6

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{a_j + \alpha_j} = 1$$

On pose

$$F = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{a_j + X} \in \mathbb{C}(X).$$

Donc,

$$(S) \iff \forall i \in [\![1, n]\!], F(\alpha_i) = 0.$$

De plus, $-1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{X + a_j}$ est la décomposition en éléments simples d'une fraction rationelle ayant pour pôles simples $-a_1, -a_2, \ldots, -a_n$.

Donc,

$$\begin{cases} F = \dfrac{P}{(X + a_1)(X + a_2) \cdots (X + a_n)} \text{ avec } P \in \mathbb{C}[X] \\ \\ \forall i \in [\![1, n]\!], F(\alpha_i) = 0. \end{cases}$$

Comme $\deg(F) = 0$, $\deg(P) = n$.

De plus,

$$\forall i \in [\![1, n]\!], P(\alpha_i) = 0$$

Donc
$$\exists \lambda \in \mathbb{C}, P = \lambda(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_n).$$

Donc

$$\begin{aligned}\forall j \in [\![1,n]\!], x_j &= \frac{P(-a_j)}{\prod_{i\neq j}(-a_j+a_i}\\ &= \frac{\lambda\prod_{i=1}^{n}(-a_j-\alpha_i)}{\prod_{i\neq j}(a_i-a_j)}.\end{aligned}$$

De plus, -1 est le quotient de la division euclidienne de P par $\prod_{i=1}^{n}(X+a_i)$ c'est-à-dire λ. Donc, $\lambda=-1$.

$$\forall j \in [\![1,n]\!], x_j = \frac{(-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n}(a_j+\alpha_i)}{\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}}(a_i-a_j)}.$$

Exercice 7

1. $$\left(\frac{P'}{P}\right)' = \frac{P''P-P'^2}{P^2}.$$

   On note $x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ les racines (réelles) de P. Pour tout $x \notin \{x_1,\ldots,x_n\}$, $P'(x)^2 - P''(x)P(x)$ est du signe opposé à $f'(x)$ où $f : x \mapsto \dfrac{P'(x)}{P(x)}$.

   Or,
   $$\forall x \notin \{x_1,\ldots,x_n)\}, f(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}$$
   et donc
   $$\forall x \notin \{x_1,\ldots,x_n\}, f'(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{-1}{(x-x_i)^2} < 0$$
   donc
   $$\forall x \notin \{x_1,\ldots,x_n\}, P'(x)^2 - P''(x)P(x) > 0$$
   par continuuité, on a donc
   $$\forall x \in \mathbb{R}, P'(x)^2 - P''(x)P(x) \geqslant 0.$$

2. D'après la formule de Taylor,
   $$P = \sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k.$$
   D'où
   $$\forall k \in [\![0,n]\!], a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}.$$

D'où, d'après 1. :

$$a_1{}^2 - 2a_2a_0 \geqslant 0$$

Donc si $a_0a_2 \geqslant 0$,

$$a_0a_2 \leqslant 2a_0a_2 \leqslant a_0{}^2$$

et si $a_0a_2 \leqslant 0$,

$$a_0a_2 \leqslant 0 \leqslant a_0{}^2$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a aussi, comme $P^{(k-1)}$ est scindé on a

$$P^{(k)}(0)^2 - P^{(k+1)}(0)P^{(k-1)}(0) \geqslant 0$$

donc

$$(k!)^2 a_k^2 - (k+1)!(k-1)! a_{k+1}a_{k-1} \geqslant 0$$

$$a_k^2 \geqslant \frac{k}{k+1} a_k^2 \geqslant a_{k+1}a_{k-1}$$