Chapitre 21

Matrice linéaire

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Matrices d'un vecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Définition: Soit $x \in E$. On sait qu'il existe un unique n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

La matrice de x dans la base $\mathscr{B}$ est la colonne

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Remarque:
En général, si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont 2 bases différentes, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \neq \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$.

Deuxième partie

Matrice d’une famille de vecteurs

Soient E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.

Définition: La matrice de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice M telle que, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, la j-ème colonne de M est $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_j)$.

Proposition: Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.

$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})\right)$$

■

Corollaire: Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p) \in E^p$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.

1. $\mathscr{F}$ est libre $\iff \mathrm{rg}(M) = p$
2. $E = \mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \iff \mathrm{rg}(M) = n$
3. $\mathscr{F}$ base de $E \iff n = p = \mathrm{rg}(M) \iff M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
   Dans ce cas,
   $$\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(\mathscr{B})$$

■

Troisième partie

Matrices d'une application linéaire

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1,\dots,f_p)$ une base de F.

Proposition – Définition: Soit $x \in E$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$. Soit $y \in F$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(y)$. On pose $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{p,j} \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\left(f(e_j)\right)$$

Alors

$$y = f(x) \iff Y = AX$$

On dit que A est la <u>matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$</u>. On la note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.

■

Théorème: Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1,\dots,f_p)$ une base de F.

$$\begin{aligned} \Phi : \mathscr{L}(E,F) &\longrightarrow \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{aligned}$$

Φ est un $\mathbb{K}$-isomorphisme linéaire.

■

Corollaire: Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, alors

$$\dim\left(\mathscr{L}(E,F)\right) = \dim(E) \times \dim(F)$$

□

Théorème: Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F et $\mathscr{D}$ une base de G. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$$

■

Quatrième partie

Formules de changement de bases

Proposition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E et $x \in E$. Soit $P = P_{\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_2)$.
Alors
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(x) = P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(x)$$

■

Proposition: Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E, et $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ deux bases de F et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

Soient $\begin{cases} P = P_{\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_2) \\ Q = P_{\mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_1}(\mathscr{C}_2) \\ A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1, \mathscr{C}_1}(f) \end{cases}$ Alors,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2, \mathscr{C}_2}(f) = Q^{-1}AP$$

■

Proposition – Définition: Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})^2$.
On dit que A et B sont <u>équivalentes</u> si
$$\exists (P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}), B = Q^{-1}AP$$
Cette relation est une relation d'équivalence. □

Théorème: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ deux bases de E, $P = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)$.
Alors
$$B = P^{-1}AP.$$

□

Définition: Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. On dit que A et B sont <u>semblables</u> s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que
$$B = P^{-1}AP.$$
L'ensemble $\left\{P^{-1}AP \mid P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\right\}$ est la <u>classe de similitude de A</u>.

Définition: Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
La <u>trace</u> de A est
$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Proposition:

1. $\mathrm{tr} \in \mathscr{L}\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\big) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^*$

2. $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

■

Proposition: Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$.

$$A \text{ et } B \text{ semblables } \implies \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$$

■

Remarque (⚠ Attention):
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathrm{tr}(A) = 2 = \mathrm{tr}(B)$
Or, A et B ne sont pas semblables, sinon

$$A = P^{-1}BP \text{ avec } P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}) \qquad = P^{-1}I_2P$$
$$= P^{-1}P$$
$$= I_2 \neq A$$

Définition

Corollaire: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base de E. $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. La <u>trace</u> de f est $\mathrm{tr}(A)$.
Ce nombre ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie. On note ce nombre $\mathrm{tr}(f)$. □

Proposition: Soit p un projecteur de E de dimension finie. Alors

$$\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$$

■

Cinquième partie

Conséquences

Proposition: La multiplication matricielle est associative.

■

Proposition: Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. On suppose que $AB = I_n$. Alors $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$ et $A^{-1} = B$.

■

Remarque:
Au passage, on a montré que

$$f \in \mathrm{GL}(E) \iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

et, dans ce cas,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)^{-1}$$

Proposition: Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
Le nombre maximal de lignes linéairement indépendantes de A est égal au rang de A.

■

Définition: Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

La <u>transposée</u> de A, notée ${}^tA = (b_{j,i})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est définie par

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \forall j \in [\![1, n]\!], b_{j,i} = a_{i,j}.$$

Les lignes de ${}^tA$ sont les colonnes de A. Les colonnes de ${}^tA$ sont les lignes de A.

Corollaire:

$$\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$$

□

Proposition: $\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array}$ est la symétrie par rapport à $S_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $A_n(\mathbb{K})$ où

$$S_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = A\} = \begin{pmatrix} & & (u) \\ & & \\ (u) & & \end{pmatrix}$$

et

$$A_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = -A\} = \begin{pmatrix} 0 & & (u) \\ & \ddots & \\ (-u) & & 0 \end{pmatrix}$$

et donc
$$S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$
■

Proposition: Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
$$^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$
■

Corollaire: Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors ${}^tA \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et
$$\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$$
■

Sixième partie

Matrices par blocs

Proposition: Soient F et G supplémentaires dans E :

$$E = F \oplus G.$$

Soit $f \in \mathscr{L}(F)$ et $g \in \mathscr{L}(G)$. Alors

$$\exists! h \in \mathscr{L}(E) h_{|F} = f,\ h_{|G} = g \text{ et } h = f \circ p + g \circ q$$

où $\begin{cases} p \text{ est la projection sur } F \text{ parallèlement à } G \\ q \text{ est la projection sur } G \text{ parallèlement à } F \end{cases}$.

On a aussi $q = \mathrm{id}_E - p$.

■

Proposition: On reprend les notations et hypothèses précédentes. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F, et $(f_1, \dots, f_q)$ une base de G. Alors, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$ est une base de E et

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(h) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

où $\begin{cases} A = \mathrm{Mat}_{(e_1, \dots e_p)}(f) \\ B = \mathrm{Mat}_{(f_1, \dots, f_q)}(g) \end{cases}$ □

Proposition: Soient $(A, A') \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $(B, B') \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})^2$.

1. $$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AA' & 0 \\ \hline 0 & BB' \end{array}\right)$$
2. $$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \in \mathrm{GL}_{n+p}(\mathbb{K}) \iff \begin{cases} A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ B \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \end{cases}$$
   et dans ce cas,
   $$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & B^{-1} \end{array}\right)$$
3. $$\mathrm{tr} \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \mathrm{tr}\, A + \mathrm{tr}\, B$$

■

Proposition: Soient $A, A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B, B' \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C, C' \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $D, D' \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AA' + BC' & AB' + BD' \\ \hline CA' + DC' & CB' + DD' \end{array}\right)$$

Cette formule se généralise à un nombre quelconque de blocs :

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,n} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2,n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{p,1} & A_{p,2} & \cdots & A_{p,n} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c} A'_{11} & A'_{12} & \cdots & A'_{1,n} \\ \hline A'_{21} & A'_{22} & \cdots & A'_{2,n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A'_{p,1} & A'_{p,2} & \cdots & A'_{p,n} \end{array}\right)$$

Cette matrice se calcyle comme on s'y attend si les dimensions des blocs autorisent les produits.

Proposition: Le rang d'une matrice A, c'est la taille de la plus grande matrice carrée inversible que l'on peut extraire de A. □