Chapitre 21

TD

Hugo Salou MP2I
Dernière mise à jour le 14 juin 2022

Table des matières

Exercice 1

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = P(X+1)$.

1. La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$.

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ \varphi(X^k) &= (X+1)^k \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i\end{aligned}$$

Donc,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A \text{ est inversible} \iff \varphi \text{ bijective}$$

On pose $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X-1) \end{array}$

φ et ψ sont réciproques l'une de l'autre donc

$$A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\psi).$$

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![1, n]\!]\,,\ \psi(X^k) &= (X-1)^k \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i (-1)^{k-i}\end{aligned}$$

Donc,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & (-1)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $f : z \mapsto z + a\overline{z}$.

1. $\forall x \in \mathbb{C}, f(x) \in \mathbb{C}$.
   Soient $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= (\lambda x + \mu y) + a\overline{(\lambda x + \mu y)} \\ &= \lambda x + \mu y + a\lambda\overline{x} + a\mu\overline{y} \\ &= \lambda(x + a\overline{x}) + \mu(y + a\overline{y}) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) \end{aligned}$$

   Donc $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C})$.
2. $f(1) = 1 + a \times 1 = a + 1$
   $f(i) = i + a \times (-i) = i(a - 1)$

$$M = \mathrm{Mat}_{(1,i)}(f) = \begin{pmatrix} 1 + \mathfrak{Re}(a) & \mathfrak{Im}(a) \\ \mathfrak{Im}(a) & \mathfrak{Re}(a) - 1 \end{pmatrix}$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x\,\mathfrak{Re}(a) + y\,\mathfrak{Im}(a) \\ x\,\mathfrak{Im}(a) + y - y\,\mathfrak{Re}(a) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(M) &= \big(1 + \mathfrak{Re}(a)\big)\big(-\mathfrak{Re}(a) + 1\big) - \mathfrak{Im}(a)^2 \\ &= 1 - \mathfrak{Re}(a)^2 - \mathfrak{Im}(a)^2 \\ &= 1 - |a|^2 \end{aligned}$$

   Si $a \neq 1$, $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Si $a = 1$,

   Cas 1 $\mathfrak{Re}(a) = -1$, alors

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

   On a

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_1) = \mathrm{Vect}(1) = \mathbb{R}$$

   Cas 2 $\mathfrak{Re}(a) \neq -1$, alors

$$\begin{cases} x = \dfrac{-y\mathfrak{Im}(a)}{1 + \mathfrak{Re}(a)} \end{cases}$$

   et donc

$$z = y\left(\frac{-\mathfrak{Im}(a)}{1 + \mathfrak{Re}(a)} - i\right)$$

   On a

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\big(-\mathfrak{Im}(a) + i(1 + \mathfrak{Re}(a))\big)$$

4.

$$\begin{aligned}\dim(\operatorname{Im} f) &= \dim(\mathbb{C}) - \dim(\operatorname{Ker} f)\\ &= 1\end{aligned}$$

Donc, si $\mathfrak{Re}(a) \neq -1$,

$$\mathfrak{Im}(f) = \operatorname{Vect}(1+a)$$

sinon

$$\mathfrak{Im}(f) = \operatorname{Vect}(2i) = i\mathbb{R}$$

Exercice 4

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 P(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(a_i)$$

On pose

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}\\ P &\longmapsto \int_0^1 P(t)\,dt.\end{aligned}$$

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ f(P) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(a_i)$$

On pose

$$\begin{aligned} g_i : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}\\ P &\longmapsto P(a_i).\end{aligned}$$

On doit montrer : $\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f(P) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, g_i(P).}$

$\mathscr{B} = (g_0, \ldots, g_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$. Soit $\mathscr{C} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

On a $g_1(1) = 1$, $g_1(X) = a_1$, …, $g_1(X^n) = {a_1}^n$

Donc,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ {a_0}^n & {a_1}^n & \cdots & {a_n}^n \end{pmatrix}$$

${}^tA = \operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(D)$ où D est la base des polynômes interpolateurs de Lagrange.

Donc ${}^tA$ inversible et donc A inversible.

Exercice 5

$\dim(E) = n$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose $f \circ f = 0$.

<u>Anaylyse</u> Soit $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 \cdots & 0 & 1 \\ \hline \vdots & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

$$\forall i \leqslant n - p, f(u_i) = 0$$

$$\forall i > n - p, f(u_i) = u_{i-n+p}$$

i.e.

$$\begin{cases} u_1 = f(u_{n-p+1}) \\ u_2 = f(u_{n-p+2}) \\ \vdots \\ u_p = f(u_n) \end{cases}$$

<u>Synthèse</u> Soit F tel que $\mathrm{Ker}(f) \oplus F = E$. On pose $p = \dim(F)$ et $\mathscr{C} = (v_1, \dots, v_p)$ une base de F.

$$\forall i, u_{n-p+i} = v_i$$

$u_i = f(u_{n-p+i})$ pour $i \in [\![1, p]\!]$
La famille $(u_1, \dots, u_p, u_{n-p+1}, \dots, u_n)$ est-elle libre ?
Soit F un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$:

$$\mathrm{Ker}(f) \oplus F = E$$

On pose $p = \dim(F)$ et $(v_1, \dots, v_p)$ une base de F.

$$\begin{cases} u_{n-p+1} = v_1 \\ u_{n-p+2} = v_2 \\ \vdots \\ u_n = v_p \end{cases}$$

On pose aussi

$$\begin{cases} u_1 = f(u_{n-p+1}) = f(v_1) \\ u_2 = f(u_{n-p+2}) = f(v_2) \\ \vdots \\ u_p = f(u_n) = f(v_p). \end{cases}$$

$$\forall i \in [\![1, p]\!], f(u_i) = f\big(f(v_i)\big) = 0$$

donc

$$\forall i \in [\![1, p]\!], u_i \in \mathrm{Ker}(f).$$

Montrons que $(u_1, \dots, u_p)$ est libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$. On suppose

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0.$$

Donc

$$\sum_{i=0}^{p} \lambda_i f(v_i) = 0$$

donc

$$f\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i v_i\right)=0$$

donc

$$\sum_{i=0}^{p}\lambda_i v_i\in \mathrm{Ker}(f).$$

Or,

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i v_i\in F.$$

Comme $F\cap \mathrm{Ker}(f)=\{0\}$:

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i v_i=0.$$

Comme $(v_1,\ldots,v_p)$ est libre,

$$\forall i\in [\![1,p]\!]\,,\lambda_i=0.$$

On complète $(u_1,\ldots,u_p)$ en une base $(u_1,\ldots,u_p,u_{p+1},\ldots,u_{n-p})$ de $\mathrm{Ker}(f)$ ($\dim(\mathrm{Ker}\,f)=\dim E-\dim F=n-p$. Montrons que $(u_1,\ldots,u_n)$ est libre. Soit $(\mu_1,\ldots,\mu_n)\in\mathbb{K}^n$. On suppose

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i u_i=0.$$

Donc,

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n-p}\mu_i u_i}_{\in\mathrm{Ker}\,f}=-\underbrace{\sum_{i=n-p+1}^{n}\mu_i u_i}_{\in F}.$$

Donc

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-p}\mu_i u_i=0\\ \displaystyle\sum_{i=n-p+1}^{n}\mu_i u_i=0.\end{cases}$$

Comme $(u_1,\ldots,u_{n-p})$ est libre :

$$\forall i\in [\![1,n-p]\!]\,,\mu_i=0.$$

Comme $(u_{n-p+1},\ldots,u_n)$ est libre :

$$\forall i\in [\![n-p+1,n]\!]\,,\mu_i=0.$$

Donc $(u_1,\ldots,u_n)$ est libre. donc, c'est une base de E.

$$\mathrm{Mat}_{(u_1,\ldots,u_n)}(f)=\left(\begin{array}{c|c}(0)&I_p\\ \hline (0)&(0)\end{array}\right)$$

Exercice 7

$\dim(E)=n$ donc $\dim\big(\mathscr{L}(E)\big)=n^2$.

On cherche $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M^2=M$.

$$\forall i\in [\![1,n]\!]\,,e_{i,i}^2=e_{i,i}$$

$$(e_{k,\ell}+e_{i,i})^2 = e_{i,i}+e_{k,\ell}e_{i,i}+e_{k,\ell}^2+e_{i,i}e_{k,\ell}$$

$$e_{i,j}e_{k,\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ e_{i,\ell} & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>Cas 1</u> $\ell \neq k$ et $i \neq k$
<u>Cas 2</u> $\ell \neq k$ et $i = k$ donc, $e_{i,i}+e_{i,\ell}$

$$n(n-1) = n^2 - n$$

$(e_{i,j})$ libre

$(e_{11},\dots,e_{1,n},e_{12}+e_{11},\dots,e_{i,1},\dots,e_{i,i},\dots)$.

Exercice 8

Partie I.

1. (a) Soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Soit $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} x\in\operatorname{Ker} f &\iff f(x)=0 \\ &\iff \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(x)\big)=\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(0)=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \\ &\iff A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix}x_n\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \\ &\iff x_n=0 \\ &\iff x=(x_1,\dots,x_{n-1},0) \\ &\qquad\;\; =\sum_{i=1}^{n-1}x_ie_i \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\operatorname{Ker} f=\operatorname{Vect}(e_1,\dots,e_{n-1})}$.
D'après le théorème du rang,

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} f &= \dim\mathbb{R}^n-\dim(\operatorname{Ker} f) \\ &= n-(n-1)=1. \end{aligned}$$

De plus,

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_n)\big)=A\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1)$$

donc $f(e_n) = e_1 \neq 0$.

Donc, $\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(e_n)\big) = \operatorname{Vect}(e_1)}$.

On constate que

$$\boxed{\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Comme $f(x) \in \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$,

$$f\big(f(x)\big) = 0 \text{ donc } f^2 = 0.$$

donc $\boxed{f \text{ est nilpotent}}$. Comme $A \neq 0$, f est nilpotent $\boxed{\text{d'indice } 2}$.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker} g &\iff B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x_1 = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{\operatorname{Ker} g = \operatorname{Vect}(e_2, \dots, e_n)}.$$

De plus, $g(e_1) = e_n \neq 0$ donc

$$\boxed{\operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}(e_n)}$$

et

$$\boxed{\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} g}$$

donc $\boxed{g \text{ est nilpotente d'indice } 2}$.

(b)

$$\begin{aligned} A^2 &= \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)^2 \\ &= \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ f) \\ &= \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par récurrence,

$$\boxed{\forall k \geqslant 2, A^k = 0}, \; A^1 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^0 = I_n.$$

De même,

$$\boxed{\forall k \geqslant 2, B^k = 0}, \; B^1 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B^0 = I_n.$$

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$(A+B)^k = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}\big((f+g)^k\big)$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= (x_n, 0, \dots, 0) + (0, \dots, 0, x_1) \\ &= (x_n, 0, \dots, 0, x_1) \end{aligned}$$

.

$$
\begin{aligned}
(f+g)^2(x) &= (f+g)(x_n, 0, \dots, x_1) \\
&= (x_1, 0, \dots, 0, x_n)
\end{aligned}
$$

On en déduit par récurrence que

$$
\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \begin{cases} (f+g)^{2k}(x) = (x_1, 0, \dots, 0, x_n) \\ (f+g)^{2k+1}(x) = (x_n, 0, \dots, 0, x_1) \end{cases}
$$

D'où

$$
\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} (A+B)^{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \\ (A+B)^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0. \end{cases}}
$$

Donc, $\boxed{A+B \text{ n'est pas nilpotente}}$.

(d)

$$
\boxed{AB = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}
$$

car $f \circ g(e_1) = f(e_n) = e_1$
et $\forall k \geqslant 2, f(e_k) = 0$.

$$
\boxed{BA = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix}}
$$

car $\forall k < n, g \circ f(e_k) = g(0) = 0$
et $g \circ f(e_n) = g(e_1) = e_n$.
De plus,

$$
\begin{aligned}
\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, (f \circ g)^2(x) &= f \circ g(x_1, 0, \dots, 0) \\
&= (x_1, 0, \dots, 0) \\
&= f \circ g(x)
\end{aligned}
$$

donc $(AB)^2 = AB$ et donc

$$
\boxed{\forall k \geqslant 1, (AB)^k = AB \neq 0}.
$$

De même,

$$
(g \circ f)^2 = g \circ f
$$

et donc

$$
\boxed{\forall k \geqslant 1, (BA)^k = BA \neq 0}.
$$

Ainsi, $\boxed{\text{ni } AB \text{ ni } BA \text{ ne sont nilpotentes}}$.

(e) $N_n(\mathbb{R})$ n'est pas stable par somme, donc ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et a fortiori ce n'est pas une sous-algèbre.

2. (a) Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$. On suppose

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i f^i(e_1) = 0.$$

Pour $k \in [\![0, p-1]\!]$,

$$f^k\left(\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i f^i(e_1)\right) = 0$$

i.e.

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \underbrace{f^{k+i}(e_1)}_{=0 \text{ si } k+1 \geqslant p} = 0$$

i.e.

$$\sum_{i=0}^{p-k-1} \lambda_i f^{k+i}(e_1) = 0.$$

En particulier, avec $k = p-1$:

$$\lambda_0 \underbrace{f^{p-1}(e_1)}_{\neq 0} = 0$$

donc $\lambda_0 = 0$. Avec $k = p-2$:

$$\underbrace{\lambda_0 f^{p-2}(e_1)}_{=0} + \lambda_1 \underbrace{f^{p-1}(e_1)}_{\neq 0} = 0$$

donc $\lambda_1 = 0$.
De proche en proche,

$$\forall i \in [\![0, p-1]\!], \lambda_i = 0.$$

La famille $\left(f^{p-1}(e_1), \ldots, f(e_1), e_1\right)$ a p vecteurs et $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ donc $\boxed{p \leqslant n}$.

(b) Soit g nilpotent d'indice p. D'après 2.(a), $p \leqslant n$.
D'où

$$\begin{aligned} g^n &= g^p \circ g^{n-p} \\ &= 0 \circ g^{n-p} \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. (a) On sait que $\mathscr{C} = \left(f^2(e_1), f(e_1), e_1\right)$ est libre. Elle a $\dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

car $f\left(f^2(e_1)\right) = 0$, $f\left(f(e_1)\right) = f^2(e_1)$, $f(e_1) = 0 \cdot f^2(e_1) + 1 \cdot f(e_1) + 0 \cdot e_1$

(b) Soit $x \in \operatorname{Im} f$. On considère $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = f(a)$.
D'où $f(x) = f\left(f(a)\right) = f^2(a) = 0$ et donc $x \in \operatorname{Ker} f$.
On a montré $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. et donc

$$\dim(\operatorname{Im} f) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} f)$$

D'après le théorème du rang,

$$3 = \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f)$$

$f \neq 0$ donc $\dim(\operatorname{Im} f) > 0$. Donc, $\boxed{\dim(\operatorname{Im} f) = 1 \text{ et } \dim(\operatorname{Ker} f) = 2}$.

$f(e_1) \neq 0$ et $f(e_1) \in \operatorname{Ker} f$ donc $\big(f(e_1)\big)$ est une famille libre de $\operatorname{Ker} f$. Comme $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $e_3 \in \operatorname{Ker} f$ tel que $\big(f(e_1), e_3\big)$ soit une base de $\operatorname{Ker} f$.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On suppose

$$\alpha f(e_1) + \beta e_1 + \gamma e_3 = 0$$

donc, en applicant f,

$$\beta \underbrace{f(e_1)}_{\neq 0} = 0$$

donc $\beta = 0$ et donc

$$\alpha f(e_1) + \gamma e_3 = 0.$$

Or, $\big(f(e_1), e_3\big)$ est libre donc $\alpha = \gamma = 0$.

Donc, $\mathscr{D} = \big(f(e_1), e_1, e_3\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et

$$\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathscr{D}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

4.

5. (c) Soit $M \in N_n(\mathbb{R})$. D'après 4., il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$PMP^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & * & \dots & * \\ \hline * & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & * \\ \hline * & \dots & * & 0 \end{array}\right)$$

De plus, d'après (2b),

$$\operatorname{tr}\left(P(MP^{-1})\right) = \operatorname{tr}\left((MP^{-1})P\right) = \operatorname{tr}(M).$$

Comme les blocs diagonaux de PMP^{-1} sont nuls, $\operatorname{tr}(PMP^{-1}) = 0$.

Donc $M \in \operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$. On a prouvé

$$N_n(\mathbb{R}) \subset \operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$$

$\operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donc

$$\operatorname{Vect}\left(N_n(\mathbb{R})\right) \subset \operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$$

6. (a) $E_{12}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $E_{12} \in N_2(\mathbb{R})$.

$E_{12}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $E_{12} \in N_2(\mathbb{R})$.

$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $N \in N_2(\mathbb{R})$.

(b)

$$M = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + (b-a)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (c+a)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\in \operatorname{Vect}(N, E_{12}, E_{21})$

(c)

$$\operatorname{Ker}(\operatorname{tr}) \subset \operatorname{Vect}(N, E_{12}, E_{21}) \subset \operatorname{Vect}\left(N_2(\mathbb{R})\right) \subset \operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$$

7. (a)
$$E_{ij}^2 = (a_{k,\ell})$$

où
$$\forall k,\ell,\ a_{k,\ell} = \sum_{m=0}^{n} \underbrace{\delta_{i,j}^{k,m}}_{=\begin{cases}0 & \text{si } i \neq k \text{ et } j \neq m\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}} + \delta_{i,j}^{m,\ell}$$

Soit $m \in [\![0, n]\!]$.
$$\delta_{i,j}^{k,m}\ \delta_{i,j}^{m,\ell} \neq 0 \iff \begin{cases} k = i\ m = j \\ m = i \\ \ell = j \end{cases} \implies i = j$$

Comme $i \neq j$, $E_{ij}^2 = 0$.

$$\begin{aligned}
N_i^2 &= E_{11}^2 - E_{11}E_{1i} + E_{11}E_{i1} - E_{11}E_{ii} - E_{1i}E_{11} + E_{1i}^2 - E_{1i}E_{i1} \\
&\quad + E_{1i}E_{ii} + E_{i1}E_{i1} + E_{i1}^2 - E_{i1}E_{ii} - E_{ii}E_{11} + E_{ii}E_{1i} - E_{ii}E_{i1} \\
&\quad + E_{ii}^2 \\
&= \cancel{E_{11}} - \cancel{E_{1i}} - \cancel{E_{11}} + \cancel{E_{1i}} + \cancel{E_{i1}} - \cancel{E_{ii}} - \cancel{E_{i1}} + \cancel{E_{ii}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(b) Soit $(\lambda_{i,j})_{i \neq j} \in \mathbb{R}^{n^2 - n}$ et $(\mu_i)_{2 \leqslant u \leqslant n} \in \mathbb{R}^{n-1}$.
On suppose que
$$\sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} \lambda_{i,j} E_{i,j} + \sum_{i=2}^{n} \mu_i N_i = 0.$$

Soit $(k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$. Le coefficient en position (k, ℓ) de la combinaison ci-dessus est :
$$\sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} \lambda_{i,j} \delta_{i,j}^{k,\ell} + \sum_{i=2}^{n} \mu_i \left(\delta_{1,1}^{k,\ell} - \delta_{1,i}^{k,\ell} + \delta_{1,i}^{k,\ell} - \delta_{i,i}^{k,\ell} \right)$$
$$= \delta_{11}^{k,\ell} \left(\sum_{i=2}^{n} \mu_i \right) - \sum_{i=2}^{n} \mu_i \delta_{i,i}^{k,\ell} + \sum_{i=2}^{n} (\lambda_{1,i} - \mu_i) \delta_{1i}^{k\ell} + \sum_{i=2}^{n} (\lambda_{i,1} + \mu_i) \delta_{i,1}^{k,\ell} + \sum_{2 \leqslant i \neq j \leqslant n} \lambda_{i,j} \delta_{i,j}^{k,\ell}$$

Soit (k, ℓ) avec $\begin{cases} 2 \leqslant k \leqslant n, \\ 2 \leqslant \ell \leqslant n, \\ k \neq \ell. \end{cases}$

Alors
$$\begin{cases}
\delta_{11}^{k,\ell} = 0 \\
\forall i \in [\![2, n]\!], \delta_{i,i}^{k,\ell} = 0 \\
\forall i \in [\![2, n]\!], \delta_{1,i}^{k,\ell} = 0 \\
\forall i \in [\![2, n]\!], \delta_{i,1}^{k,\ell} = 0 \\
\forall i \neq j \in [\![2, n]\!], \delta_{i,j}^{k,\ell} = 0 \text{ sauf si } \begin{cases} k = i \\ j = \ell \end{cases}
\end{cases}$$

et donc $\lambda_{k,\ell} = 0$.
Soit $\ell \in [\![2, n]\!]$ et $k = 1$.
$$\begin{cases}
\delta_{11}^{k,\ell} = 0 \\
\forall i \in [\![2, n]\!], \delta_{i,i}^{k,\ell} = 0 \\
\forall i \in [\![2, n]\!], \delta_{1,i}^{k,\ell} \neq 0 \iff i = \ell \\
\forall i \in [\![2, n]\!], \delta_{i,1}^{k,\ell} = 0 \\
\forall i \neq j \in [\![2, n]\!], \delta_{i,j}^{k,\ell} = 0
\end{cases}$$

donc $\lambda_{1,\ell} - \mu_\ell = 0$.
De même,

$$\begin{cases} \forall k \in [\![2,n]\!]\,, \lambda_{k1} + \mu_k = 0 \\ \forall k \in [\![2,n]\!]\,, -\mu_k = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} \forall k \neq \ell, \lambda_{k,\ell} = 0 \\ \forall k \geqslant 2, \mu_k = 0 \end{cases}$$

donc la famille est libre.
On a trouvé une famille libre consituée de $n^2 - n + n - 1 = n^2 - 1$ matrices dans $\mathrm{Vect}\big(N_n(\mathbb{R})\big)$ donc

(c)

$$\dim\Big(\mathrm{Vect}\big(N_n(\mathbb{R})\big)\Big) \geqslant n^2 - 1.$$

Or

$$\mathrm{Vect}\big(N_n(\mathbb{R})\big) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$$

donc

$$\dim\Big(\mathrm{Vect}\big(N_n(\mathbb{R})\big)\Big) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\,\mathrm{tr}) = n^2 - 1.$$

Donc

$$\dim\Big(\mathrm{Vect}\big(N_n(\mathbb{R})\big)\Big) = n^2 - 1 = \dim(\mathrm{Ker}\,\mathrm{tr})$$

Comme $\mathrm{Vect}\big(N_n(\mathbb{R})\big) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$,

$$\boxed{\mathrm{Vect}\big(N_n(\mathbb{R})\big) = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}).}$$

(d) $\mathrm{Card}(\mathscr{F}_n) = \dim\Big(\mathrm{Vect}\big(N_n(\mathbb{R})\big)\Big)$ et $\mathscr{F}_n$ est libre, donc $\mathscr{F}_n$ est une base de $\mathrm{Vect}\big(N_n(\mathbb{R})\big)$.