Chapitre 21

Matrice linéaire

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Matrices d'un vecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Définition: Soit $x \in E$. On sait qu'il existe un unique n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

La <u>matrice de x dans la base $\mathscr{B}$</u> est la colonne

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Remarque:
En général, si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont 2 bases différentes, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \neq \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$.

Exemple:
$E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ et

$$\mathscr{C} = \left(\frac{X(X-1)(X-2)}{6}, -\frac{X(X-1)(X-3)}{2}, \frac{X(X-2)(X-3)}{2}, -\frac{(X-1)(X-2)(X-3)}{6} \right)$$

$$P = X^2 - X + 1$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = P(3)\frac{X(X-1)(X-2)}{6} + P(2)\frac{-X(X-1)(X-3)}{2} + P(1)\frac{X(X-2)(X-3)}{2} + P(0)\frac{-(X-1)(X-2)(X-3)}{6}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(P) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Deuxième partie

Matrice d’une famille de vecteurs

Soient E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.

Définition: La matrice de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice M telle que, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, la j-ème colonne de M est $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_j)$.

Exemple:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition: Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.

$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})\right)$$

Preuve:
Dans ce chapitre, on définit le rang d'une matrices comme le nombre maximale de colonnes linéairement idépendantes. □

Corollaire: Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p) \in E^p$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.

1. $\mathscr{F}$ est libre $\iff \mathrm{rg}(M) = p$
2. $E = \mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \iff \mathrm{rg}(M) = n$
3. $\mathscr{F}$ base de $E \iff n = p = \mathrm{rg}(M) \iff M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
   Dans ce cas,
   $$(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}))^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(\mathscr{B})$$

Exemple:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M$$

On sait que $\mathscr{B}$ est une base donc $M \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$. Donc,

$$M^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{3}{2} & 3 & -\frac{11}{6} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{5}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Preuve: 1.

$$\begin{aligned}\mathscr{F} \text{ est libre } &\iff (u_1,\ldots,u_p) \text{ base de } \operatorname{Vect}(u_1,\ldots,u_p)\\ &\iff \dim\big(\operatorname{Vect}(u_1,\ldots,u_p)\big) = p\\ &\iff \operatorname{rg}\big((u_1,\ldots,u_p)\big) = p\\ &\iff \operatorname{rg}(M) = p\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\mathscr{F} \text{ engendre } E &\iff E = \operatorname{Vect}(u_1,\ldots,u_p)\\ &\iff \dim(E) = \dim\big(\operatorname{Vect}(u_1,\ldots,u_p)\big)\\ &\iff n = \operatorname{rg}(M)\end{aligned}$$

3.

$$\mathscr{F} \text{ base de } E \iff \begin{cases}\operatorname{rg}(M) = p\\ \operatorname{rg}(M) = n\end{cases}$$

On suppose que $\mathscr{F}$ est une base de E.

$$M = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1,n}\\ m_{21} & \ldots & m_{2,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ m_{n,1} & \ldots & m_{n,n}\end{pmatrix}$$

Soit $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{F}}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,n}\\ a_{21} & \ldots & a_{2,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n}\end{pmatrix}$. Montrons que $AM = I_n$.
La première colonne de AM est

$$A\begin{pmatrix} m_{11}\\ \vdots\\ m_{n,1}\end{pmatrix} = m_{11}\begin{pmatrix} a_{11}\\ \vdots\\ a_{n,1}\end{pmatrix} + m_{21}\begin{pmatrix} a_{12}\\ \vdots\\ a_{n,2}\end{pmatrix} + \cdots + m_{n,1}\begin{pmatrix} a_{1,n}\\ \vdots\\ a_{n,n}\end{pmatrix}$$

Or, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\begin{pmatrix} a_{1,i}\\ \vdots\\ a_{n,i}\end{pmatrix} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{F}}(e_i)$.
Donc, la première colonne de AM est la colonne des coordonées du vecteur $m_{11}e_1 + m_{21}e_2 + \cdots + m_{n,1}e_n$ dans la base $\mathscr{F}$.
Or,

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} m_{11}\\ m_{21}\\ \vdots\\ m_{n,1}\end{pmatrix}$$

donc $u_1 = m_{11}e_1 + m_{21}e_2 + \cdots + m_{n,1}e_n$.
Comme $u_1 = 1\cdot u_1 + 0\cdot u_2 + \cdots + 0\cdot u_n$,

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{F}}(u_1) = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

La j-ème colonne de AM est

$$A\begin{pmatrix} m_{1,j} \\ \vdots \\ m_{n,j} \end{pmatrix} = m_{1,j}\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + m_{2,j}\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix} + \cdots + m_{n,j}\begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Or, $\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(e_i)$.
Donc, la j-ème colonne de AM est la colonne des coordonées du vecteur $m_{1,j}e_1 + m_{2,j}e_2 + \cdots + m_{n,j}e_n$ dans la base $\mathscr{F}$.
Or,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} m_{1,j} \\ m_{2,j} \\ \vdots \\ m_{n,j} \end{pmatrix}$$

donc $u_j = m_{1,j}e_1 + m_{2,j}e_2 + \cdots + m_{n,j}e_n$.
Comme $u_j = 0 \cdot u_1 + \cdots + 1 \cdot u_j + \cdots + 0 \cdot u_n$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(u_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \leftarrow j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

En inversant les rôles de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{B}$, on prouve que $MA = I_n$.

On suppose maintenant que $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrons que $\mathscr{F}$ est une base de E.
On pose

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On sait que

$$M\,M^{-1} = I_n$$

Donc

$$\forall j \in [\![1, n]\!]\,, a_{1,j}\begin{pmatrix} m_{11} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix} + \cdots + a_{n,j}\begin{pmatrix} m_{1,n} \\ \vdots \\ m_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \leftarrow j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\forall j \in [\![1, n]\!]\,, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}u_i\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_j)$$

donc

$$\forall j \in [\![1, n]\!], e_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} u_i \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$$

Donc $\mathscr{F}$ engendre E.

$$\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = n = \dim(E)$$

donc $\mathscr{F}$ est une base de E.

$\square$

Troisième partie

Matrices d'une application linéaire

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F.

Proposition – Définition: Soit $x \in E$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$. Soit $y \in F$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(y)$. On pose $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall j \in [\![1,n]\!]\,, \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{p,j} \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\left(f(e_j)\right)$$

Alors

$$y = f(x) \iff Y = AX$$

On dit que A est la <u>matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$</u>. On la note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.

Preuve:

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \qquad y = \sum_{i=1}^{p} y_i f_i$$

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff \sum_{i=1}^{p} y_i f_i = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) \\ &\iff \sum_{i=1}^{p} y_i f_i = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) \end{aligned}$$

Or,

$$\forall j \in [\![1,n]\!]\,, f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i$$

D'où,

$$\begin{aligned} y = f(x) \iff \sum_{i=1}^{p} y_i f_i &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\right) f_i \\ \iff \forall i \in [\![1,p]\!]\,, &\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i = y_i \\ \iff AX = Y & \end{aligned}$$

□

Exemple:
$E = \mathbb{R}^3$ et f la projection sur $R = \left\{(x,y,z) \mid x + y = 0\right\}$ parallèlement à $G = \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right)$.

— $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ base canonique.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$e_1=(1,0,0)=\underbrace{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}_{\in F}+\underbrace{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}_{\in G}$$

$$f(e_1)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e_1-\frac{1}{2}e_2-\frac{1}{2}e_3$$

$$e_2=(0,1,0)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$e_3=(0,0,1)=(0,0,1)+(0,0,0)$$

Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

— $\mathscr{C}=(e_3,e_1-e_2,e_1+e_2+e_3)=(u_1,u_2,u_3)$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}}(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

car

$$f(u_1)=u_1 f(u_2)=u_2 f(u_3)=0$$

—

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

—

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f\big((x,y,z)\big)\right) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)\times\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left((x,y,z)\right) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x-y}{2} \\ \frac{y-x}{2} \\ \frac{-x-y}{2}+z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc

$$f\big((x,y,z)\big)=\left(\frac{x-y}{2},\frac{y-x}{2},z-\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\left(f(x,y,z)\right) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left((x,y,z)\right)\\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{-x-y}{2}+z\\ \frac{x-y}{2}\\ 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc

$$f\big((x,y,z)\big) = \left(z-\frac{x+y}{2}\right)u_1 + \left(\frac{x-y}{2}\right)u_2$$

Exemple:
Soient $E=\mathbb{C}$, $\mathscr{B}=(1,i)$, $\theta\in\mathbb{R}$ et f la rotation de centre O et d'angle θ.

$$\begin{aligned} f:\mathbb{C}&\longrightarrow\mathbb{C}\\ z&\longmapsto e^{i\theta}z\end{aligned}$$

f est linéaire :

$$\begin{aligned}\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\forall(z,w)\in\mathbb{C}^2 f(\lambda z+\mu w) &= e^{i\theta}(\lambda z+\mu w)\\ &=\lambda e^{i\theta}z+\mu e^{i\theta}w\\ &=\lambda f(z)+\mu f(w)\end{aligned}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

car

$$\begin{cases} f(1)=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta\\ f(i)=ie^{i\theta}=-\sin\theta+i\cos\theta\end{cases}$$

$$z=x+iy \text{ avec } x,y\in\mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\cos\theta & -y\sin\theta\\ x\sin\theta & y\cos\theta\end{pmatrix}$$

Théorème: Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E et $\mathscr{C}=(f_1,\ldots,f_p)$ une base de F.

$$\begin{aligned}\Phi:\mathscr{L}(E,F)&\longrightarrow\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})\\ f&\longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\end{aligned}$$

Φ est un $\mathbb{K}$-isomorphisme linéaire.

Preuve: — Soient $(f,g)\in\mathscr{L}(E,F)^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$. On pose $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)=\Phi(f)=(a_{i,j})$ et $B=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)=\Phi(g)=(b_{i,j})$. On pose également $C=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda f+\mu g)=\Phi(\lambda f+\mu g)=(c_{i,j})$.

$$\begin{aligned}\forall j\in[\![1,n]\!],\begin{pmatrix}c_{1,j}\\ \vdots\\ c_{p,j}\end{pmatrix} &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\left((\lambda f+\mu g)(e_j)\right)\\ &=\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\left(\lambda f(e_j)+\mu g(e_j)\right)\end{aligned}$$

Or,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\left(f(e_j)\right) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{p,j} \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\left(g(e_j)\right) = \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{p,j} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\left(\lambda f(e_j) + \mu g(e_j)\right) = \lambda \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{p,j} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{p,j} \end{pmatrix}$$

Donc $C = \lambda A + \mu B$ et donc Φ est linéaire.

— Soit $f \in \mathrm{Ker}\,\Phi$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\forall j \in [\![1, n]\!]\,, f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} 0 \cdot f_i = 0_F$$

Soit $x \in E$. On pose $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = 0_F$$

Donc $f = 0$. Donc Φ est injective.
Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On pose $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.
On définit $F : E \to F$ de la façon suivante : pour tout $x \in E$, on décompose $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$. On pose alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j f_i \end{aligned}$$

Montrons que $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\Phi(f) = A$

— Soit $(x, y) \in E^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. On pose

$$\begin{cases} x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j & \text{avec } (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \\ y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j & \text{avec } (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n \end{cases}$$

Donc

$$\alpha x + \beta y = \sum_{j=1}^{n} (\alpha x_j + \beta y_j)(e_j$$

D'où

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(\alpha x_j + \beta x_j) f_i \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j f_i + \beta \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} y_j f_i \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \end{aligned}$$

Soit $j \in [\![1, p]\!]$.

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i$$

et

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\left(f(e_j)\right) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{p,j} \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = A$$

□

Corollaire: Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, alors

$$\dim\left(\mathscr{L}(E,F)\right) = \dim(E) \times \dim(F)$$

□

Exemple (*Trouver tous les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$*):
Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (ax + cy, bx + dy) \end{aligned}$$

avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.
Une base de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ est (f_1, f_2, f_3, f_4) où

$$\begin{cases} f_1 : (x,y) \mapsto (x,0) \\ f_2 : (x,y) \mapsto (0,x) \\ f_3 : (x,y) \mapsto (y,0) \\ f_4 : (x,y) \mapsto (0,y) \end{cases}$$

Théorème: Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F et $\mathscr{D}$ une base de G. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$$

Preuve:

On pose

$$\begin{aligned}\mathscr{B} &= (e_1, \dots, e_n)\\ \mathscr{C} &= (f_1, \dots, f_p)\\ \mathscr{D} &= (g_1, \dots, g_q).\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}A &= (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\\ B &= (b_{k,i})_{\substack{1\leqslant k\leqslant q\\ 1\leqslant i\leqslant p}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g)\\ C &= (c_{k,j})_{\substack{1\leqslant k\leqslant q\\ 1\leqslant j\leqslant n}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g\circ f)\end{aligned}$$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. La j-ième colonne de C est

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{D}}\big(g\circ f(e_j)\big) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{D}}\big(g\big(f(e_j)\big)\big)\\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\big(f(e_j)\big)\\ &= BA_j\end{aligned}$$

où A_j est la j-ème colonne de A.
Or, la j-ème colonne de BA est aussi BA_j.
Donc, $C = BA$. □

Quatrième partie

Formules de changement de bases

Proposition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E et $x \in E$. Soit $P = P_{\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_2)$.
Alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_2}(x) = P^{-1} \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_1}(x)$$

Preuve:

$$P = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_2, \mathscr{B}_1}(\operatorname{id}_E) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

si $\begin{cases} \mathscr{B}_1 = (e_1, \dots, e_n) \\ \mathscr{B}_2 = (u_1, \dots, u_n) \end{cases}$

$$\begin{aligned} P \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_2}(x) &= \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_2, \mathscr{B}_1}(\operatorname{id}_E) \times \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_2}(x) \\ &= \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_1}\big(\operatorname{id}_E(x)\big) \\ &= \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_1}(x) \end{aligned}$$

$$E_{\mathscr{B}_2} \qquad \begin{array}{c} x \\ X \end{array} \xrightarrow[P]{\operatorname{id}_E} \begin{array}{c} \operatorname{id}_E(x) \\ PX \end{array} \qquad E_{\mathscr{B}_1}$$

□

Proposition: Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E, et $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ deux bases de F et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

Soient $\begin{cases} P = P_{\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_2) \\ Q = P_{\mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{C}_1}(\mathscr{C}_2) \\ A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_1, \mathscr{C}_1}(f) \end{cases}$ Alors,

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_2, \mathscr{C}_2}(f) = Q^{-1} A P$$

Preuve:

$$\begin{tikzcd} E_{\mathscr{B}_1} \arrow[r, "f", "A"'] & F_{\mathscr{C}_1} \arrow[d, "\operatorname{id}_F"', "Q^{-1}"] \\ E_{\mathscr{B}_2} \arrow[u, "\operatorname{id}_E", "P"'] \arrow[r, "f", "A'"'] & F_{\mathscr{C}_2} \end{tikzcd}$$

$f = \operatorname{id}_F \circ f \circ \operatorname{id}_E$ donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_2, \mathscr{C}_2}(f) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2}(\operatorname{id}_F) \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_1, \mathscr{C}_1}(f) \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_2, \mathscr{B}_1}(\operatorname{id}_E)$$

$\square$

EXEMPLE:
$E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0\}$, $G = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$ et f la projection sur F parallèlement à G.

Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base canonique de E et $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3)$ avec $\begin{cases} u_1 = (0,0,1) \\ u_2 = (1,-1,0) \\ u_3 = (1,1,1) \end{cases}$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Proposition – Définition: Soient $(A,B) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})^2$.
On dit que A et B sont équivalentes si

$$\exists (P,Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}), B = Q^{-1}AP$$

Cette relation est une relation d'équivalence. $\square$

Théorème: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ deux bases de E, $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)$.
Alors

$$B = P^{-1}AP.$$

$\square$

Définition: Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. On dit que A et B sont semblables s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

L'ensemble $\{P^{-1}AP \mid P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\}$ est la classe de similitude de A.

EXEMPLE:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \\ u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \text{ et } X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n + u_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= AX_n \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$$

On aimerait trouver D diagonale et $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & (z_2, z_1 + z_2) \end{array}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A$ où $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^2$.

On cherche $\mathscr{C} = (u_1, u_2)$ une base de $\mathbb{C}^2$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = D$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$.

<u>Analyse</u> On suppose que $\mathscr{C}$ existe. Dans ce cas,

$$\begin{cases} f(u_1) = \lambda_1 u_1, \\ f(u_2) = \lambda_2 u_2, \\ (\lambda_1, \lambda_2) \text{ libre.} \end{cases}$$

Soit $u = (x, y) \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} f(u) = \lambda u &\iff \begin{cases} y = \lambda x \\ x + y = \lambda y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \lambda x \\ x + \lambda x - \lambda^2 x = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \lambda x \\ x(1 + \lambda - \lambda^2) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} A + \lambda - \lambda^2 = 0 \\ y = \lambda x \end{cases} \\ &\iff u = (0,0) \text{ ou } \begin{cases} \lambda = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} x \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} x \end{cases} \end{aligned}$$

<u>Synthèse</u> On pose $\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \\ u_1 = (1, \varphi) \end{cases}$ et $\begin{cases} \lambda_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} = -\dfrac{1}{\varphi} \\ u_2 = \left(1, -\dfrac{1}{\varphi}\right) \end{cases}$.

Ainsi, $\begin{cases} f(u_1) = \lambda_1 u1 \\ f(u_2) = \lambda_2 u_2. \end{cases}$

u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre donc une base.

On pose $\mathscr{C} = (u_1, u_2)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\varphi} \end{pmatrix} = D.$

$$A = PDP^{-1}$$

et

$$\begin{cases} P^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}) = P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}} \\ P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}) = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} \end{cases}$$

On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix}$ donc

$$P^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\varphi} & -1 \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varphi} & 1 \\ \varphi & -1 \end{pmatrix}$$

Donc $A = PDP^{-1}$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varphi} & 1 \\ \varphi & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} * & u_n \\ * & * \end{pmatrix} = A^n$$

Exemple:

$$y'' + \omega^2 y = 0 \qquad \omega \in \mathbb{R}_*^+$$

$$\forall t, Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \forall t, Y'(t) &= \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y'(t) \\ -\omega^2 y(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \\ &= AY(t) \end{aligned}$$

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & (b, -\omega^2 a) \end{array}$.
$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ où $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ base canonique de $\mathbb{C}^2$. On cherche $\mathscr{C} = (u_1, u_2)$ une base de $\mathbb{C}^2$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = D$.

Analyse Si $\mathscr{C}$ existe,

$$\begin{cases} f(u_1) = \lambda_1 u_1 \\ f(u_2) = \lambda_2 u_2 \end{cases}$$

Soit $u = (a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda \in C$.

$$\begin{aligned} f(u) = \lambda u &\iff \begin{cases} b = \lambda a \\ -\omega^2 a = \lambda b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = \lambda a \\ -\omega^2 a = \lambda^2 a \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda^2 = -\omega^2 \\ b = \lambda a \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^2_{\mathscr{B}} \arrow[r, "f", "A"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}"', "P^{-1}"] & \mathbb{C}^2_{\mathscr{B}} \\ \mathbb{C}^2_{\mathscr{C}} \arrow[r, "f", "D"'] & \mathbb{C}^2_{\mathscr{C}} \arrow[u, "\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}", "P"'] \end{tikzcd}$$

Synthèse On pose $\begin{cases} \lambda_1 = i\omega \\ u_1 = (1, i\omega) \end{cases}$ et $\begin{cases} \lambda_2 = -i\omega \\ u_2 = (1, -i\omega) \end{cases}$. (u_1, u_2) est bien une base de $\mathbb{C}^2$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix} = D$

$$AP = PD \iff P^{-1}A = DP^{-1}$$

On a

$$P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix}$$

On pose

$$\forall t, X(t) = P^{-1} \times Y(t)$$

Donc

$$\begin{aligned} \forall t, X'(t) = P^{-1}Y'(t) &= P^{-1}AY(t) \\ &= DP^{-1}Y(t) \\ &= DX(t) \end{aligned}$$

On pose

$$\forall t, X(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X'(t) = DX(t) &\iff \begin{cases} a'(t) = i\omega a(t) \\ b'(t) = -i\omega b(t) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a(t) = \lambda e^{i\omega t} \\ b(t) = \mu e^{-i\omega t} \end{cases} \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall t, Y(t) &= P \times X(t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda e^{i\omega t} \\ \mu e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda e^{i\omega t} + \mu e^{-i\omega t} \\ * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall t, y(t) = \lambda e^{i\omega t} + \mu e^{-i\omega t}$$

Définition: Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
La trace de A est

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Proposition:
1. $\mathrm{tr} \in \mathscr{L}\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\big) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^*$
2. $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

Preuve: 1. Soient $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$. On pose $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$.

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_{i,i} \beta b_{i,i}) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \beta \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} \\ &= \alpha \operatorname{tr}(A) + \beta \operatorname{tr}(B)\end{aligned}$$

2. Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. On pose $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$, $AB = (c_{i,j})$ et $BA = (d_{i,j})$.

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{j,i} a_{i,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} d_{j,j} \\ &= \operatorname{tr}(BA)\end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$.

$$A \text{ et } B \text{ semblables} \implies \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$$

Preuve:
On suppose A et B semblables. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$. Donc

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\left(P^{-1}(BP)\right) = \operatorname{tr}\left((BP)P^{-1}\right) = \operatorname{tr}(B)$$

□

Remarque (⚠ Attention):
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\operatorname{tr}(A) = 2 = \operatorname{tr}(B)$
Or, A et B ne sont pas semblables, sinon

$$A = P^{-1}BP \text{ avec } P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}) \qquad = P^{-1} I_2 P$$
$$= P^{-1}P$$
$$= I_2 \neq A$$

Définition

Corollaire: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base de E. $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. La <u>trace</u> de f est $\operatorname{tr}(A)$.

Ce nombre ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie. On note ce nombre $\operatorname{tr}(f)$. $\square$

Proposition: Soit p un projecteur de E de dimension finie. Alors

$$\operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$$

Preuve:
On sait que

$$E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$$

Soit $\mathscr{B}_1 = (e_1, \dots, e_k)$ une base $\operatorname{Ker}(p)$ et $\mathscr{B}_2 = (e_{k+1}, \dots, e_n)$ une base de $\operatorname{Im}(p)$.
On pose $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$. $\mathscr{B}$ est une base de E et

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$$

$$\operatorname{tr}(p) = \operatorname{tr}(A) = n - k = \#\mathscr{B}_2 = \dim(\operatorname{Im} p) = \operatorname{rg}(p)$$

$\square$

Exemple:
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$
$G = \operatorname{Vect}\big((1, 1, 1)\big)$
f la projection sur F parallèlement à G.
$\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^2_{\mathscr{B}} \arrow[r, "f", "A"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}"', "P"] & \mathbb{C}^2_{\mathscr{B}} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}"', "P"] \\
\mathbb{C}^2_{\mathscr{C}} \arrow[r, "f", "D"'] \arrow[ur, dashed] & \mathbb{C}^2_{\mathscr{C}}
\end{tikzcd}$$

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$\operatorname{tr}(A) = 2 = \dim(F)$$

Cinquième partie

Conséquences

Proposition: La multiplication matricielle est associative.

Preuve:

$$\begin{cases} A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K}) \end{cases}$$

Soient $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, $g \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^p)$ et $h \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^q)$ telles que

$$\begin{cases} A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \\ B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{B}}(g) \\ C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{D},\mathscr{E}}(h) \end{cases}$$

où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^p$, $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{D}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^r$, $\mathscr{E}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^q$.

$$\begin{aligned} A(BC) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{D}\mathscr{C}}\big(f \circ (g \circ h)\big) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{D},\mathscr{C}}\big((f \circ g) \circ h\big) \\ &= (AB)C \end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. On suppose que $AB = I_n$. Alors $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$ et $A^{-1} = B$.

Preuve:
Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A$, $g \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = B$.

$$\begin{aligned} AB = I_n \text{ donc } & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) \qquad \text{donc } f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} \\ & \text{donc } f \circ g \text{ est injective} \\ & \text{donc } g \text{ est injective} \\ & \text{donc } g \text{ est un isomorphisme} \end{aligned}$$

Or, $f \circ g = \mathrm{id}$ donc $f = f \circ g \circ g^{-1} = g^{-1}$

$$\begin{aligned} BA = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g \circ f) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g \circ g^{-1}) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) \\ &= I_n \end{aligned}$$

Donc $A = B^{-1}$. □

Remarque:

Au passage, on a montré que

$$f \in \mathrm{GL}(E) \iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

et, dans ce cas,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)^{-1}$$

Proposition: Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
Le nombre maximal de lignes linéairement indépendantes de A est égal au rang de A.

Preuve:
On appelle rang par lignes le nombre exact de lignes linéairement indépendantes.

Ce rang par ligne est invariant quand on effectue une opération élémentaire sur les lignes.

En appliquant la méthode du pivot de Gauß, on obtient une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \boxed{1} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

qui a le même rang par lignes que A.

On obsèrve que ce rang r est égal au nombre de pivots.

Soit S le système homogène

$$AX = 0$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. D'après l'algorithme du pivot, la résolution de ce système fournit r inconnues principales et $n-r$ paramètres.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $x_1, \dots, x_{n-r}$ sont les paramètres et $x_{n-r+1}, \dots, x_n$ les inconnues principales.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ telle que

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f).$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$.

$$\begin{aligned} AX = 0 &\iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(0) \\ &\iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\big(f(x)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(0) \\ &\iff f(x) = 0 \\ &\iff x \in \operatorname{Ker} f \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble E des solutions de (S) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel isomorphe à $\operatorname{Ker}(f)$.

De plus,

$$\begin{aligned} g : E &\longrightarrow \mathbb{K}^{n-r} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\longmapsto (x_1, \dots, x_{n-r}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Donc, $\dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(E) = n - r$.

D'après le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{K}^n) - \dim(\mathrm{Ker}\, f) = n - (n - r) = r.$$

$\square$

Définition: Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

La <u>transposée</u> de A, notée ${}^tA = (b_{j,i})_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ 1\leqslant i\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est définie par

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \forall j \in [\![1, n]\!], b_{j,i} = a_{i,j}.$$

Les lignes de ${}^tA$ sont les colonnes de A. Les colonnes de ${}^tA$ sont les lignes de A.

Exemple:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ donc ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Corollaire:

$$\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$$

$\square$

Proposition: $\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array}$ est la symétrie par rapport à $S_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $A_n(\mathbb{K})$ où

$$S_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = A\} = \begin{pmatrix} \ddots & (u) \\ (u) & \ddots \end{pmatrix}$$

et

$$A_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = -A\} = \begin{pmatrix} 0 & & (u) \\ & \ddots & \\ (-u) & & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

Preuve:
Soient $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.

$$\begin{aligned} {}^t(\alpha A + \beta B) &= (\alpha a_{j,i} + \beta b_{j,i})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \alpha(a_{j,i}) + \beta(b_{j,i}) \\ &= \alpha {}^tA + \beta {}^tB \end{aligned}$$

Clairement,

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), {}^t\left({}^tA\right) = A$$

donc $f : A \mapsto {}^tA$ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})})$.

Or,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}) &= \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid f(A) - A = 0\} \\ &= \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = A\} \\ &= S_n(\mathbb{K})\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}) &= \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid f(A) + A = 0\} \\ &= \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = A\} \\ &= A_n(\mathbb{K})\end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

$$^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

Preuve:
On pose

$$\begin{cases} A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n, \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \\ B = (b_{j,k})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p, \\ 1 \leqslant k \leqslant q}} \\ {}^tB\,{}^tA = (c_{k,i})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant q. \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![1, q]\!], \forall i \in [\![1, n]\!], c_{k,i} &= \sum_{j=1}^{p} ({}^tB)_{k,j}({}^tA)_{j,i} \\ &= \sum_{j=1}^{p} b_{j,k} a_{i,j} \\ &= \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k} \\ &= (AB)_{i,k} \\ &= \left({}^t(AB)_{k,i}\right)\end{aligned}$$

Donc, $^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$. □

Corollaire: Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors ${}^tA \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et

$$\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$$

Preuve:
On suppose $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

$AA^{-1} = I_n$ donc ${}^t(AA^{-1}) = {}^tI_n$

donc ${}^t(A^{-1}){}^tA = I_n$

donc

$$ {}^tA \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}){}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} $$

$\square$

Sixième partie

Matrices par blocs

Exemple:
Soit p un projecteur de E :

$$E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$$

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ une base de E avec $\begin{cases} \operatorname{Im}(p) = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_k) \\ \operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n) \end{cases}$

Alors,

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

De même, si s est une symétrie de E,

$$E = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \operatorname{id}_E).$$

Soit $\mathscr{C} = (e'_1, \dots, e'_\ell, e'_{\ell+1}, \dots, e'_n)$ avec $\begin{cases} \operatorname{Vect}(e'_1, \dots, e'_\ell) = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{id}_E), \\ \operatorname{Vect}(e'_{\ell+1}, \dots, e'_n) = \operatorname{Ker}(s + \operatorname{id}_E). \end{cases}$

Alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(s) = \left(\begin{array}{c|c} I_\ell & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-\ell} \end{array}\right)$$

Proposition: Soient F et G supplémentaires dans E :

$$E = F \oplus G.$$

Soit $f \in \mathscr{L}(F)$ et $g \in \mathscr{L}(G)$. Alors

$$\exists! h \in \mathscr{L}(E) h_{|F} = f, \ h_{|G} = g \ \text{ et } \ h = f \circ p + g \circ q$$

où $\begin{cases} p \text{ est la projection sur } F \text{ parallèlement à } G \\ q \text{ est la projection sur } G \text{ parallèlement à } F \end{cases}$.

On a aussi $q = \operatorname{id}_E - p$.

Preuve: <u>Analyse</u> Soit $h \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\begin{cases} h_{|F} = f \\ h_{|G} = g \end{cases}$.

Soit $x \in E$. Alors

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in F} + \underbrace{q(x)}_{\in G}$$

Donc,

$$\begin{aligned} h(x) &= h\big(p(x)\big) + h\big(q(x)\big) \\ &= f\big(p(x)\big) + g\big(q(x)\big) \\ &= (f \circ p + g \circ q)(x) \end{aligned}$$

Si h existe, alors

$$h = f \circ p + g \circ q$$

<u>Synthèse</u> On pose $h = f \circ p + g \circ q$.

p, q, f et g sont linéaires donc h aussi.
Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} h(x) &= f\big(p(x)\big) + g\big(q(x)\big) \\ &= f(x) + g(0_E) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

donc $h_{|F} = f$ et de même $h_{|G} = g$.

□

Proposition: On reprend les notations et hypothèses précédentes. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F, et $(f_1, \dots, f_q)$ une base de G. Alors, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$ est une base de E et

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(h) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

où $\begin{cases} A = \mathrm{Mat}_{(e_1, \dots e_p)}(f) \\ B = \mathrm{Mat}_{(f_1, \dots, f_q)}(g) \end{cases}$ □

Proposition: Soient $(A, A') \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $(B, B') \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})^2$.

1. $$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AA' & 0 \\ \hline 0 & BB' \end{array}\right)$$
2. $$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \in \mathrm{GL}_{n+p}(\mathbb{K}) \iff \begin{cases} A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ B \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \end{cases}$$
   et dans ce cas,
   $$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & B^{-1} \end{array}\right)$$
3. $$\operatorname{tr} \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$$

Preuve: 1. Soit $\Big\{ f \in \mathscr{L}(F)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A, f' \in \mathscr{L}(F)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f') = A', g \in \mathscr{L}(G)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(g) = B, g$

où $\begin{cases} F \oplus G = \mathbb{K}^{n+p}, \\ \dim(F) = n, \dim(G) = p, \\ \mathscr{B} \text{ base de } F, \\ \mathscr{C} \text{ base de } G. \end{cases}$ Soit $\begin{cases} h \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^{n+p}) \text{ tel que } \begin{cases} h_{|F} = f \\ h_{|G} = g \end{cases} \\ h' \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^{n+p}) \text{ tel que } \begin{cases} h'_{|F} = f' \\ h'_{|G} = g' \end{cases} \end{cases}$

Soit $\mathscr{D} = \mathscr{B} \cup \mathscr{C}$ une base de $\mathbb{K}^{n+p}$.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array}\right) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{D}}(h) \, \mathrm{Mat}_{\mathscr{D}}(h') \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{D}}(h \circ h') \end{aligned}$$

Or, $(h \circ h')_{|F} = f \circ f'$ et $(h \circ h')_{|G} = g \circ g'$.

Donc,

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{D}}(h \circ h') &= \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ f') & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(g \circ g') \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} AA' & 0 \\ \hline 0 & BB' \end{array}\right).\end{aligned}$$

□

Proposition: Soient $A, A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B, B' \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C, C' \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $D, D' \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AA' + BC' & AB' + BD' \\ \hline CA' + DC' & CB' + DD' \end{array}\right)$$

Cette formule se généralise à un nombre quelconque de blocs :

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,n} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2,n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{p,1} & A_{p,2} & \cdots & A_{p,n} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c|c|c} A'_{11} & A'_{12} & \cdots & A'_{1,n} \\ \hline A'_{21} & A'_{22} & \cdots & A'_{2,n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A'_{p,1} & A'_{p,2} & \cdots & A'_{p,n} \end{array}\right)$$

Cette matrice se calcyle comme on s'y attend si les dimensions des blocs autorisent les produits.

Proposition: Le rang d'une matrice A, c'est la taille de la plus grande matrice carrée inversible que l'on peut extraire de A. □