Chapitre 22

Fonctions de deux variable

Hugo Salou MP2I

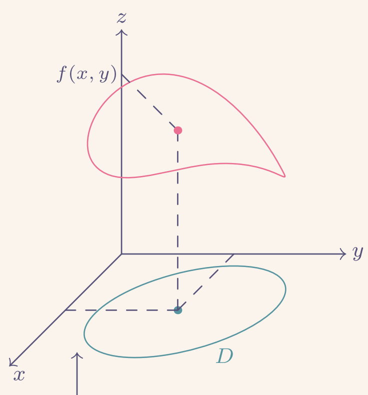
Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Quelques généralités

On s'interesse dans ce chapitre à des fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

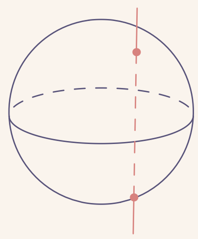


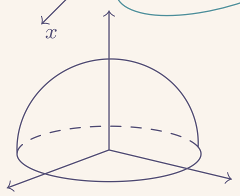
Par exemple,

$$f : (x, y) \mapsto 5xy + \sqrt{x^2 + y^2}$$

Une sphère n'est pas la surface représentative d'une fonction. Mais, une demi-sphère oui :

$$f : (x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$





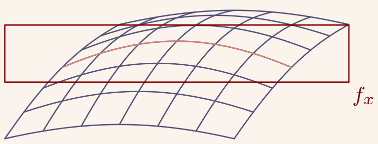
La surface de la demisphère est

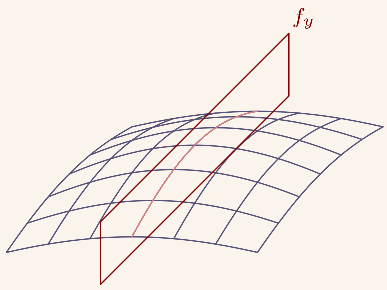
$$S = \big\{ \big(x, y, f(x, y)\big) \mid (x, y) \in D_O(1) \big\}.$$

où $D_O(1)$ est le disque unitaire à l'origine.

Point de vue naïf

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. On fixe y et on étudie $f_y : x \mapsto f(x, y)$. Ou, on fixe x et on étudie $f_x : y \mapsto f(x, y)$.





Le bon point de vue

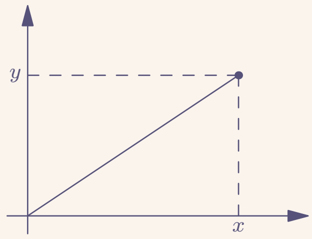
On reprend les notions d'une fonction d'une seule variable (limite, continuité, développement limité, ...) que l'on adapte aux fonctions à deux variables.

Deuxième partie

Topologie de $\mathbb{R}^2$

Définition: La norme (euclidienne) de $\mathbb{R}^2$ est l'application définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Proposition: La norme euclidienne vérifie :

1. (séparation)
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y)\| = 0 \iff x = y = 0,$$
2. (homogénéité positive)
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \|\lambda(x, y)\| = |\lambda| \, \|(x, y)\|$$
3. (inégalité triangulaire)
$$\forall (x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y) + (a, b)\| \leqslant \|(x, y)\| + \|(a, b)\|.$$

■

Définition: Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

La boule ouverte (ou disque ouvert) de centre (a, b) et de rayon r est

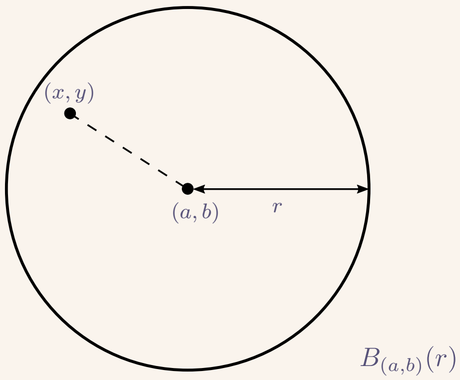
$$B_{(a,b)}(r) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (a, b)\| < r\right\}.$$

La boule fermée (ou disque fermé) de centre (a, b) et de rayon r est

$$\overline{B_{(a,b)}}(r) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (a, b)\| \leqslant r\right\}.$$

La sphère (ou boule) de centre (a, b) et de rayon r est

$$S_{(a,b)}(r) = \partial\overline{B_{(a,b)}}(r) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (a, b)\| = r\right\}.$$

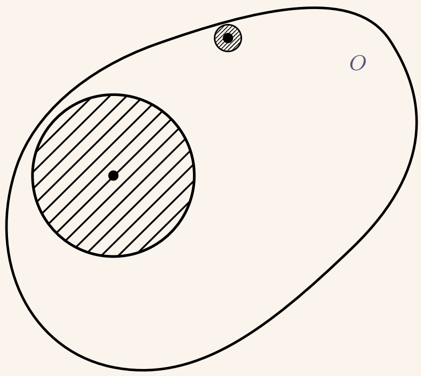


Remarque:
On parle de boule en dimension quelconque.

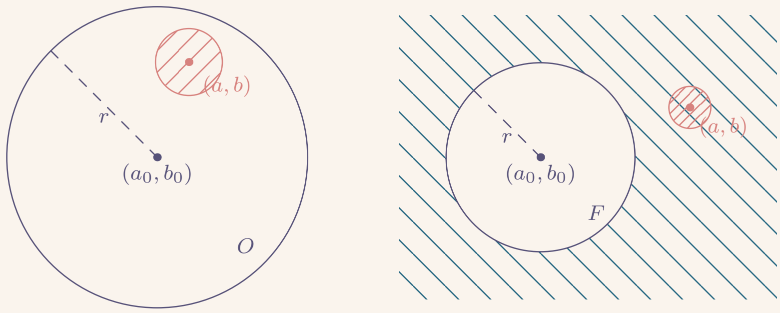
Définition: Une partie ouverte O de $\mathbb{R}^2$ (ou un ouvert) si

$$\forall (x, y) \in O, \exists r > 0, B_{(a,b)}(r) \subset O.$$

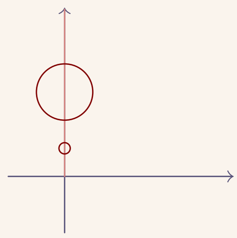
Une partie F est fermée su $\mathbb{R}^2 \setminus F$ est ouverte.



Proposition: Une boule ouverte est ouverte. Une boule fermée est fermée.



$\blacksquare$



Définition: Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $V \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$.
On dit que V est un voisinage de (a,b) s'il existe $r > 0$ tel que

$$B_{(a,b)}(r) \subset V.$$

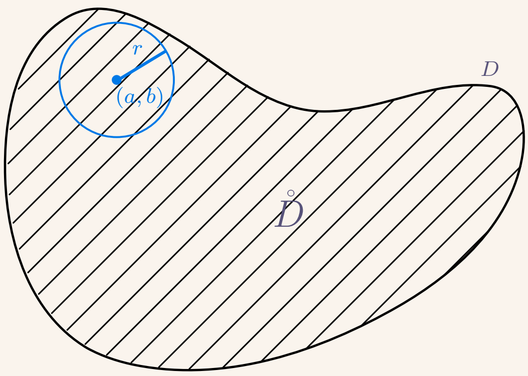
Proposition: Un ouvert non vide est un voisinage en chacun de ces points. $\square$

Définition: Soit $D \subset \mathbb{R}^2$. Un point intérieur de D est un couple $(a,b) \in D$ tel que

$$\exists r > 0, B_{(a,b)}(r) \subset D.$$

en d'autres termes, si D est un voisinage de (a,b).
On note $\mathring{D}$ l'ensemble des points intérieurs à D. C'est l'intérieur de D.

Proposition: $\mathring{D}$ est le plus grand ouvert O de $\mathbb{R}^2$ tel que $O \subset D$.



■

Définition: Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathring{D}$.

On dit que $\underline{f(x,y) \text{ tend vers } \ell \text{ quand } (x,y) \text{ tend vers } (a,b)}$ ou que ℓ est <u>une limite</u> de f en (a,b) si

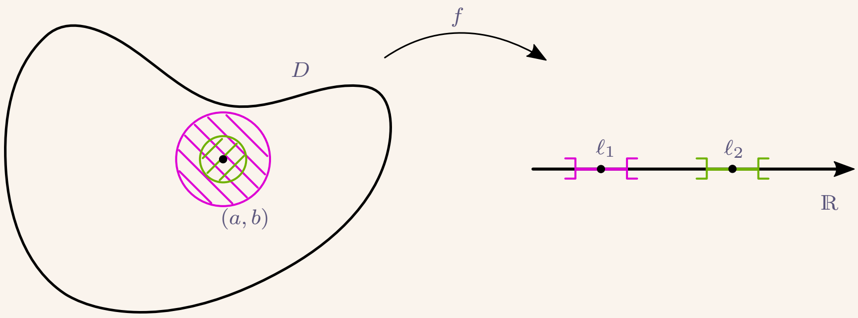
$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall (x,y) \in D, \|(x,y) - (a,b)\| < r \implies |f(x,y) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

en d'autres termes si

$$\forall V \in \mathscr{V}_\ell, \exists W \in \mathscr{V}_{(a,b)}, \forall (x,y) \in W \cap D, f(x,y) \in V.$$

Proposition (unicité de la limite)**:** Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathring{D}$, $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ telles que ℓ_1 et ℓ_2 sont des limites de f en (a,b).

Alors $\ell_1 = \ell_2$.



■

Définition: Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathring{D}$.

On dit que f est continue en (a,b) si

$$f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} f(a,b).$$

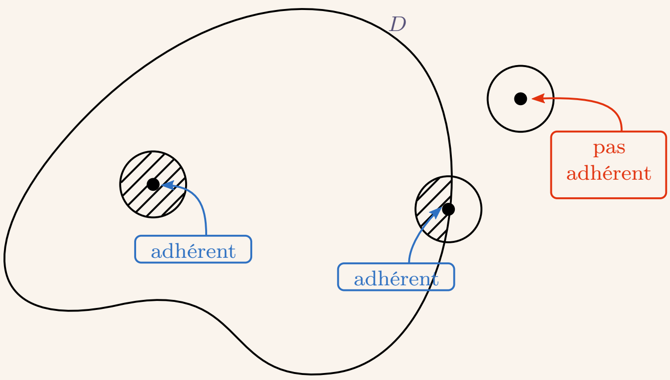
Proposition: Si $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} \ell$

alors $\begin{cases} f(x,b) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \\ f(a,y) \xrightarrow[y\to b]{} \ell. \end{cases}$

■

Contre-exemple : exercice 3.

Définition: Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.



On dit que (x,y) est adhérent à D si

$$\forall r > 0, B_{(x,y)}(r) \cap D \neq \varnothing.$$

L'ensemble des points adhérents à D est noté $\overline{D}$. On dit que $\overline{D}$ est l'adhérence de D.

Définition: Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(a,b) \in \overline{D}$, $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers ℓ quand (x,y) tend vers (a,b) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall (x,y) \in B_{(a,b)}(r) \cap D, |f(x,y) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Proposition:

1. Dans ce contexte, il y a unicité de la limite
2. La limite d'une somme, d'un produit, d'un quotien, d'une composée se comporte

comme dans le cas d'une seule variable.

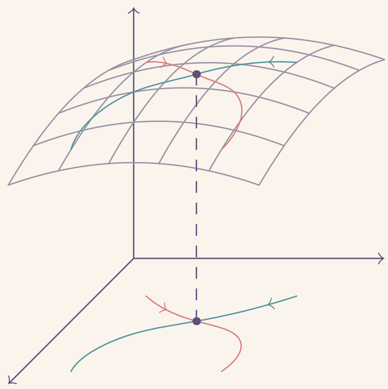
3. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ continue. Soient $g : I \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall t \in I, \big(g(t), h(t)\big) \in D.$$

Alors

$$t \in I \mapsto f\big(g(t), h(t)\big) \in \mathbb{R}$$

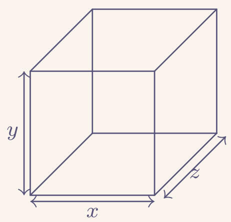
est continue.



Troisième partie

Dérivation

Motivation :



$$S(x,y,z) = 2(xy + xz + yz)$$
$$V(x,y,z) = xyz$$

On cherche à minimiser S avec la contrainte $V = 1$.

Soit f : $\begin{array}{ccl} \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & S\left(x, y, \dfrac{1}{xy}\right) = 2\left(xy + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x}\right). \end{array}$

On cherche $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$ tel que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_*^+), f(x,y) \geqslant f(a,b).$$

Définition: Soit $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(a,b) \in U$.

Si $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a} \in \mathbb{R}$, alors on dit que f a une dérivée partielle suivant x en (a,b) et cette limite est notée

$$\partial f_1(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).$$

Si $\displaystyle\lim_{y \to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y - b} \in \mathbb{R}$, alors on dit que f a une dérivée partielle suivant y en (a,b) et la limite est notée

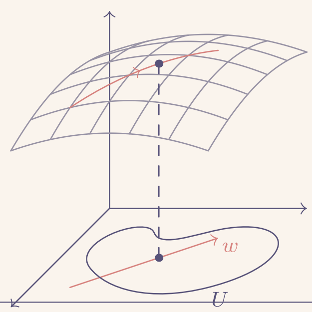
$$\partial f_2(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

Définition:
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert. Soit $(a,b) \in U$.
Soit $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$.
Si

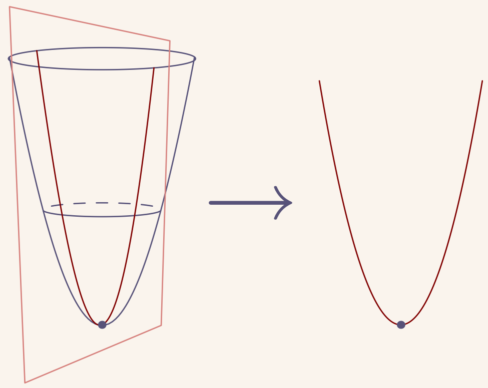
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tw_1, b + tw_2) - f(a,b)}{t}$$

existe et est réelle, alors on dit que f a une dérivée dans la direction de w et la limite est notée

$$\mathrm{d}f(w)\,(a,b) = D_w(f)\,(a,b).$$



Remarque:



Théorème: Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $(a, b) \in U$. On suppose que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent en (a, b) et sont **continues** en (a, b). Alors,

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (a+h, b+k) \in U,$$
$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \underset{(h,k)\to(0,0)}{o}\big(\|(h, k)\|\big).$$

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues.

□

Remarque:
En physique, cette formule correspond à :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= f(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y) - f(x, y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Proposition: Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ en $(a, b) \in U$. Alors,

$$\forall w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{d}f(w)\,(a, b) = w_1\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + w_2\frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

■

Définition: Avec les hypothèses précédentes, en posant

$$\nabla f(a, b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right)$$

on obtient

$$\mathrm{d}f(w)\,(a, b) = \langle w \mid \nabla f(a, b)\rangle$$

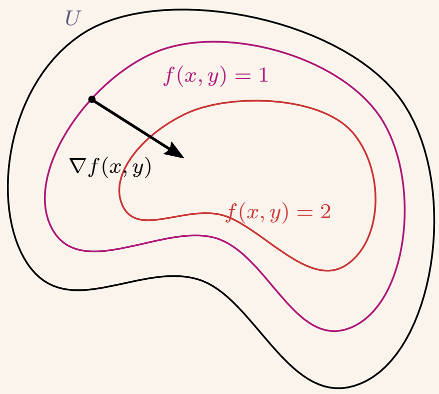
où $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est le produit scalaire.

Le vecteur $\nabla f(a,b)$ est appelé gradient de f en (a,b).

Le développement limité à l'ordre 1 de f devient

$$f\big((a,b)+w\big) = f(a,b) + \langle w \mid \nabla f(a,b)\rangle + \underset{w\to 0}{o}(\|w\|)$$

Proposition: Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.



∇f est orthogonal au lignes de niveaux de f, son orientation va dans le sens d'une augmentation de f.

∎

Remarque:

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto -mgz \end{aligned}$$

l'énerge potentielle de pesenteur

On a donc

$$\nabla V(x,y,z) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = (0,0,-mg) = \vec{P}.$$

Lemme: Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, $\gamma : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & U \\ t & \longmapsto & \big(x(t), y(t)\big) \end{array}$ où x et y sont dérivables.

On pose

$$\forall t \in I, \gamma'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big).$$

Alors $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et

$$\begin{aligned}\forall t \in I, (f\circ\gamma)'(t) &= \mathrm{d}f\big(\gamma'(t)\big)\big(\gamma(t)\big)\\ &= \big\langle \gamma'(t) \mid \nabla f\big(\gamma(t)\big)\big\rangle\\ &= x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),y(t)\big) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t),y(t)\big).\end{aligned}$$

■

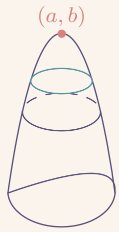
Définition: Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $(a,b) \in U$. On dit que (a,b) est un <u>point critique</u> de f si $\nabla f(a,b) = 0$ i.e. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

Dans ce cas, $f(a,b)$ est appelé <u>valeur critique</u> de f.

Proposition:
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $(a,b) \in U$ tel que

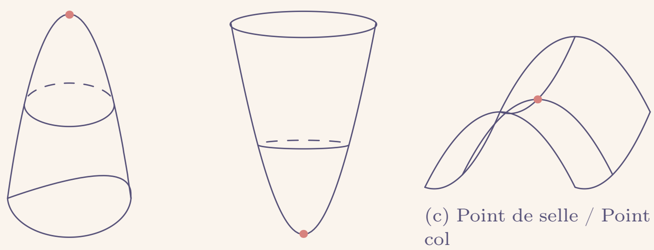
$$\exists r > 0, \forall (x,y) \in B_{(a,b)}(r), f(x,y) \leqslant f(a,b)$$

Alors $\nabla f(a,b) = (0,0)$.



■

Remarque:
Un minimum local est aussi une valeur critique.



(a) Maximum local

(b) Minimum local

(c) Point de selle / Point col

Proposition (règle de la chaîne)**:** Soit $f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$.

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & U \\ (u,v) & \longmapsto & \varphi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big) \end{array}$.

On suppose que x et y sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur V.

Alors, $f \circ \varphi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f\big(\varphi(u,v)\big) \end{array}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\begin{aligned}\forall (u_0,v_0) \in V,\ \frac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial u}(u_0,v_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(u_0,v_0)\big) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(u_0,v_0)\big)\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall (u_0,v_0) \in V,\ \frac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial v}(u_0,v_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(u_0,v_0)\big) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(u_0,v_0)\big)\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\end{aligned}$$

Remarque:
Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit $(x, y) \in U$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\nabla f(x,y)\big) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Soit

$$\begin{aligned}\varphi : V &\longrightarrow U \\ (u,v) &\longmapsto \big(x(u,v), y(u,v)\big)\end{aligned}$$

avec x, y de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $g = f \circ \varphi$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\nabla g(u,v)\big) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}}_{J(u,v)} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\ &= J(u,v)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\nabla f(x,y)\big)\end{aligned}$$

où $J(u,v) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\nabla x(u,v)\big) \vdots \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\nabla y(u,v)\big)\big)$.

On dit que $J(u, v)$ est <u>la jacobienne</u> de φ en (u, v). L'application linéaire canoniquement associée à $J(u, v)$ est la <u>différentielle de φ</u> en (u, v) noté $\mathrm{d}\varphi(u, v)$.

On a $\mathrm{d}\varphi(u,v) \in \mathscr{L}(R^2)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\mathrm{d}\varphi(u,v)\big) = J(u,v)$.

Par exemple, la jacobienne du changement de coordonnées polaires est

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$\underbrace{\det(J)}_{\text{le jacobien}} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

Dans une intégrale double, si $(x, y) = \varphi(u, v)$, alors $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \det(J)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

Ici,

$$\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta. \qquad \blacksquare$$