Chapitre 22

Fonctions de deux variable

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

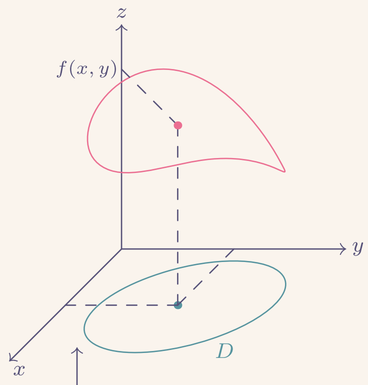
Première partie

Quelques généralités

On s'interesse dans ce chapitre à des fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

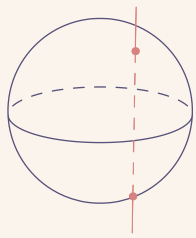
Par exemple,

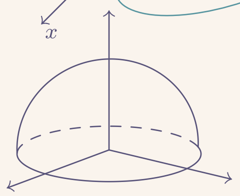
$$f : (x, y) \mapsto 5xy + \sqrt{x^2 + y^2}$$



Une sphère n'est pas la surface représentative d'une fonction. Mais, une demi-sphère oui :

$$f : (x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$





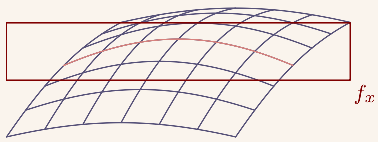
La surface de la demisphère est

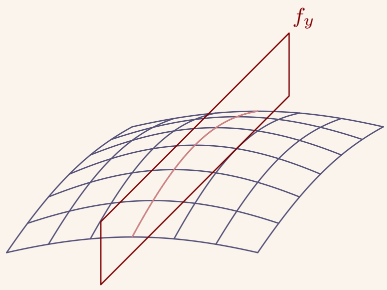
$$S = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D_O(1)\}.$$

où $D_O(1)$ est le disque unitaire à l'origine.

Point de vue naïf

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. On fixe y et on étudie $f_y : x \mapsto f(x, y)$. Ou, on fixe x et on étudie $f_x : y \mapsto f(x, y)$.





Le bon point de vue

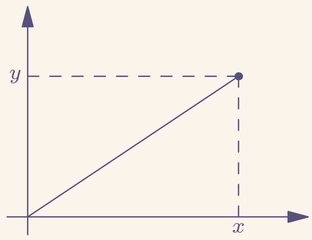
On reprend les notions d'une fonction d'une seule variable (limite, continuité, développement limité, ...) que l'on adapte aux fonctions à deux variables.

Deuxième partie

Topologie de $\mathbb{R}^2$

Définition: La norme (euclidienne) de $\mathbb{R}^2$ est l'application définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$



Proposition: La norme euclidienne vérifie :

1. (séparation)
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y)\| = 0 \iff x = y = 0,$$
2. (homogénéité positive)
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \|\lambda(x,y)\| = |\lambda| \, \|(x,y)\|$$
3. (inégalité triangulaire)
$$\forall (x,y),(a,b) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y)+(a,b)\| \leqslant \|(x,y)\| + \|(a,b)\|.$$

Preuve:
Déjà vue en replaçant (x,y) par $x+iy \in \mathbb{C}$ et $\|(x,y)\|$ par |x+iy| $\square$

Définition: Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

La boule ouverte (ou disque ouvert) de centre (a,b) et de rayon r est

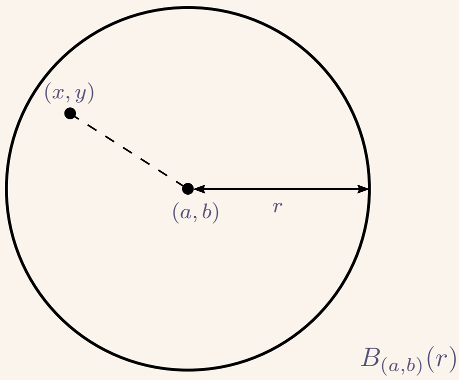
$$B_{(a,b)}(r) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)-(a,b)\| < r\right\}.$$

La boule fermée (ou disque fermé) de centre (a,b) et de rayon r est

$$\overline{B_{(a,b)}}(r) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)-(a,b)\| \leqslant r\right\}.$$

La sphère (ou boule) de centre (a,b) et de rayon r est

$$S_{(a,b)}(r) = \partial \overline{B_{(a,b)}}(r) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)-(a,b)\| = r\right\}.$$

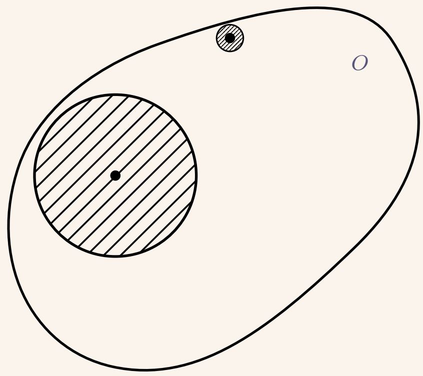


Remarque:
On parle de boule en dimension quelconque.

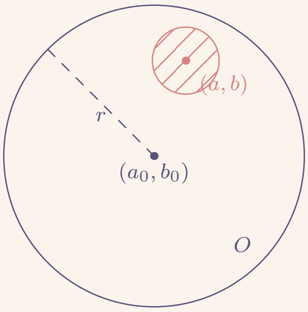
Définition: Une partie ouverte O de $\mathbb{R}^2$ (ou un ouvert) si

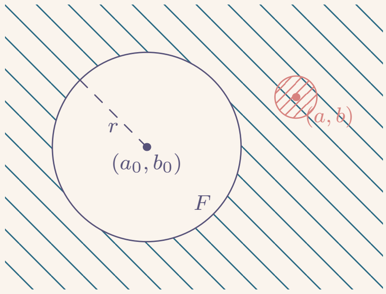
$$\forall (x,y) \in O, \exists r > 0, B_{(a,b)}(r) \subset O.$$

Une partie F est fermée su $\mathbb{R}^2 \setminus F$ est ouverte.



Proposition: Une boule ouverte est ouverte. Une boule fermée est fermée.





Preuve:
$\varnothing$ est un ouvert.

Soit B la boule ouverte de centre $(a_0,b_0) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$.

On pose $\rho = \frac{1}{2}\big(r - \|(a,b) - (a_0,b_0)\|\big)$. Montrons que

$$B_{(a,b)}(\rho) \subset B_{(a,b)}(r).$$

Soit $(x,y) \in B_{(a,b)}(\rho)$.

$$\begin{aligned}
\|(x,y) - (a_0,b_0)\| &= \|(x,y) - (a,b) + (a,b) - (a_0,b_0)\| \\
&\leqslant \|(x,y) - (a,b)\| + \|(a,b) - (a_0,b_0)\| \\
&< \rho + \|(a,b) - (a_0,b_0)\| = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}\|(a,b) - (a_0,b_0)\| \\
&< r
\end{aligned}$$

Soit F la boule fermée de centre (a_0,b_0) et de rayon $r \geqslant 0$.

Soit $(a,b) \notin F$. On pose

$$\rho = \frac{1}{2}\big(\|(a,b) - (a_0,b_0)\| - r\big) > 0.$$

Montrons que $B_{(a,b)}(\rho) \subset \mathbb{R}^2 \setminus F$.

Soit $(x,y) \in B_{(a,b)}(\rho)$.

$$\begin{aligned}
\|(x,y) - (a_0,b_0)\| &= \|(x,y) - (a,b) + (a,b) - (a_0,b_0)\| \\
&\geqslant \Big|\underbrace{\|(x,y) - (a,b)\|}_{\leqslant \rho} - \underbrace{\|(a,b) - (a_0,b_0)\|}_{> r}\Big| \\
&\geqslant \|(a,b) - (a_0,b_0)\| - \|(x,y) - (a,b)\| \\
&> \|(a,b) - (a_0,b_0)\| - \rho \\
&> \frac{1}{2}\|(a,b) - (a_0,b_0)\| + \frac{1}{2}r \\
&> r
\end{aligned}$$

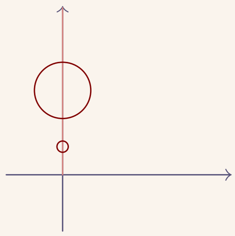
donc $(x,y) \notin F$. $\square$

Exemple:

1. $\varnothing$ est ouvert.
   $\mathbb{R}^2$ est ouvert.
2. $\varnothing$ est fermé.

$\mathbb{R}^2$ est fermé.

3. $\{(x,0) \mid x > 0\}$ n'est ni ouverte ni fermé.



Définition: Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $V \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$.
On dit que V est un voisinage de (a,b) s'il existe $r > 0$ tel que

$$B_{(a,b)}(r) \subset V.$$

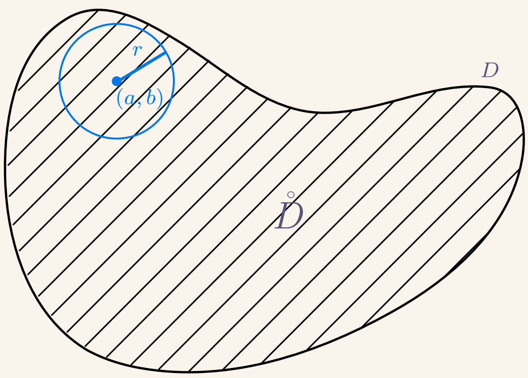
Proposition: Un ouvert non vide est un voisinage en chacun de ces points. $\square$

Définition: Soit $D \subset \mathbb{R}^2$. Un point intérieur de D est un couple $(a,b) \in D$ tel que

$$\exists r > 0, B_{(a,b)}(r) \subset D.$$

en d'autres termes, si D est un voisinage de (a,b).
On note $\mathring{D}$ l'ensemble des points intérieurs à D. C'est l'intérieur de D.

Proposition: $\mathring{D}$ est le plus grand ouvert O de $\mathbb{R}^2$ tel que $O \subset D$.



Preuve:
Soit $(a, b) \in \mathring{D}$.

Par définition, il existe $r > 0$ tel que

$$B_{(a,b)}(r) \subset D.$$

Montrons que $B_{(a,b)}(r) \subset \mathring{D}$.

Soit $(x, y) \in B_{(a,b)}(r)$. Comme $B_{(a,b)}(r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, il existe $\rho > 0$ tel que

$$B_{(x,y)}(\rho) \subset B_{(a,b)}(r)$$

donc $(x, y) \in \mathring{D}$.

Donc $\mathring{D}$ est ouvert, $\mathring{D} \subset D$.

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que $O \subset D$. Montrons que $O \subset \mathring{D}$.

Soit $(x, y) \in O$. Soit $r > 0$ tel que

$$B_{(x,y)}(r) \subset O \subset D$$

donc $(x, y) \in \mathring{D}$. □

Définition: Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$, $(a, b) \in \mathring{D}$.

On dit que $\underline{f(x, y) \text{ tend vers } \ell \text{ quand } (x, y) \text{ tend vers } (a, b)}$ ou que ℓ est <u>une limite</u> de f en (a, b) si

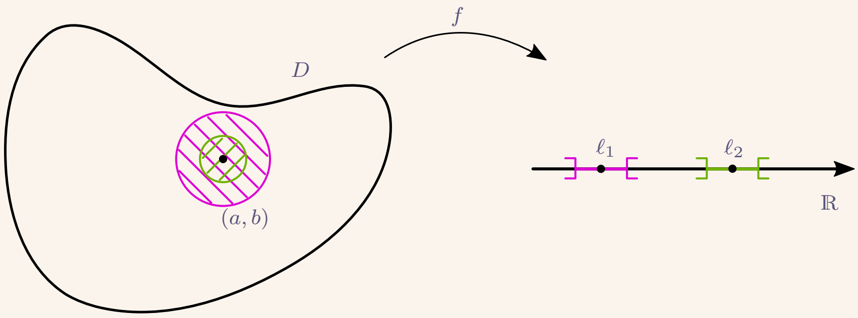
$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall (x, y) \in D, \|(x, y) - (a, b)\| < r \implies |f(x, y) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

en d'autres termes si

$$\forall V \in \mathscr{V}_\ell, \exists W \in \mathscr{V}_{(a,b)}, \forall (x, y) \in W \cap D, f(x, y) \in V.$$

Proposition (unicité de la limite)**:** Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $(a, b) \in \mathring{D}$, $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ telles que ℓ_1 et ℓ_2 sont des limites de f en (a, b).

Alors $\ell_1 = \ell_2$.



Preuve:
On suppose $\ell_1 < \ell_2$. On pose $\varepsilon = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{2} > 0$.

Soit $r_1 > 0$ tel que
$$f\big(B_{(a,b)}(r_1)\big) \subset]\ell_1 - \varepsilon, \ell_1 + \varepsilon[.$$
Soit $r_2 > 0$ tel que
$$f\big(B_{(a,b)}(r_2)\big) \subset]\ell_2 - \varepsilon, \ell_2 + \varepsilon[.$$
On pose $r = \min(r_1, r_2)$ donc
$$B_{(a,b)}(r_1) \cap B_{(a,b)}(r_2) = B_{(a,b)}(r) \neq \varnothing.$$
Soit $(x,y) \in B_{(a,b)}(r)$. Alors,
$$f(x,y) \in]\ell_1 - \varepsilon, \ell_1 + \varepsilon[\cap]\ell_2 - \varepsilon, \ell_2 + \varepsilon[= \varnothing.$$
$\lightning$ $\square$

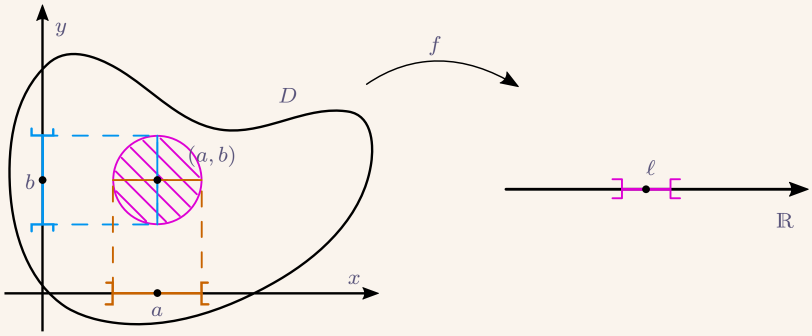
Définition: Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathring{D}$.

On dit que f est <u>continue</u> en (a,b) si
$$f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} f(a,b).$$

Proposition: <u>Si</u> $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} \ell$

<u>alors</u> $\begin{cases} f(x,b) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \\ f(a,y) \xrightarrow[y\to b]{} \ell. \end{cases}$

Preuve:



$\square$

Contre-exemple : exercice 3.

Exemple: 1. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$ limite en $(0,0)$?

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $r = \varepsilon$.

$$\forall (x,y) \in B_{(0,0)}(r), |f(x,y)| = |x| \leqslant \|(x,y)\| < r = \varepsilon$$

Donc $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} 0$.

2. limite $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^3 \end{array}$ en $(0,0)$?

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $r = \sqrt[3]{r} > 0$.

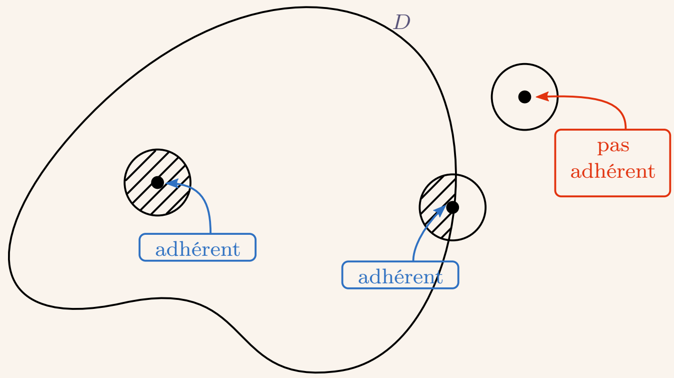
$$\forall (x,y) \in B_{(0,0)}(r), |f(x,y)| = \left|x^3\right| \leqslant \|(x,y)\|^3 < r^3 = \varepsilon.$$

3. limite de $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^3y^2 \end{array}$ en $(0,0)$?

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $r = \sqrt[5]{\varepsilon} > 0$.

$$\forall (x,y) \in B_{(0,0)}(r), |f(x,y)| = \left|x^3y^2\right| \leqslant \|(x,y)\|^3\|(x,y)\|^2 < r^5 = \varepsilon.$$

Définition: Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.



On dit que (x, y) est adhérent à D si

$$\forall r > 0, B_{(x,y)}(r) \cap D \neq \varnothing.$$

L'ensemble des points adhérents à D est noté $\overline{D}$. On dit que $\overline{D}$ est l'adhérence de D.

Définition: Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(a, b) \in \overline{D}$, $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers ℓ quand (x, y) tend vers (a, b) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall (x, y) \in B_{(a,b)}(r) \cap D, |f(x, y) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Proposition:

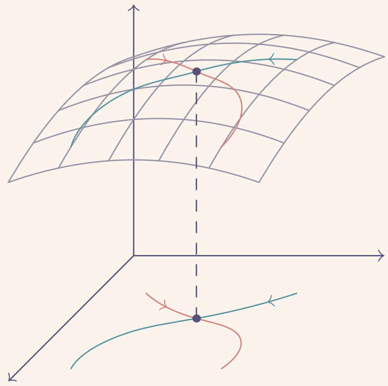
1. Dans ce contexte, il y a unicité de la limite
2. La limite d'une somme, d'un produit, d'un quotien, d'une composée se comporte comme dans le cas d'une seule variable.
3. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ continue. Soient $g : I \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall t \in I, \big(g(t), h(t)\big) \in D.$$

Alors

$$t \in I \mapsto f\big(g(t), h(t)\big) \in \mathbb{R}$$

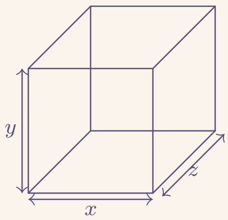
est continue.



Troisième partie

Dérivation

Motivation :



$$S(x,y,z) = 2(xy+xz+yz)$$
$$V(x,y,z) = xyz$$

On cherche à minimiser S avec la contrainte $V = 1$.

Soit $f : \begin{array}{ccc} \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & S\left(x, y, \dfrac{1}{xy}\right) = 2\left(xy + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x}\right). \end{array}$

On cherche $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$ tel que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_*^+), f(x,y) \geqslant f(a,b).$$

Définition: Soit $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(a,b) \in U$.

Si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a} \in \mathbb{R}$, alors on dit que f a une dérivée partielle suivant x en (a,b) et cette limite est notée

$$\partial f_1(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).$$

Si $\lim\limits_{y \to b} \dfrac{f(a,y) - f(a,b)}{y-b} \in \mathbb{R}$, alors on dit que f a une dérivée partielle suivant y en (a,b) et la limite est notée

$$\partial f_2(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

Exemple: 1. $f : (x,y) \mapsto xy + x - y$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \mapsto y+1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \mapsto x-1.$$

2. $f : (x,y) \mapsto xy + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \mapsto y - \frac{1}{x^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \mapsto x - \frac{1}{y^2}.$$

3. Trouver f telle que $\begin{cases} (1) : & \dfrac{\partial f}{\partial x} = y, \\ (2) : & \dfrac{\partial f}{\partial y} = x. \end{cases}$

D'après (1) :

$$\forall (x,y), \exists C(y) \in \mathbb{R}, f(x,y) = xy + C(y)$$

et donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + C'(y)$$

donc $C'(y) = 0$ et donc C est constante.

4. Trouver f telle que $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -y, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x. \end{cases}$

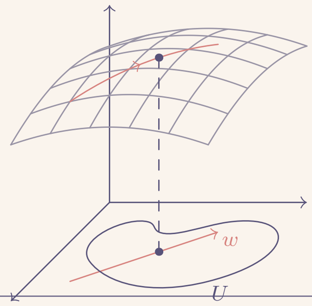
   Ce n'est pas possible !

Définition:
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert. Soit $(a,b) \in U$. Soit $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$.
Si

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tw_1, b + tw_2) - f(a,b)}{t}$$

existe et est réelle, alors on dit que f a une dérivée dans la direction de w et la limite est notée

$$\mathrm{d}f(w)\,(a,b) = D_w(f)\,(a,b).$$



Exemple:

$$\begin{aligned} f : \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

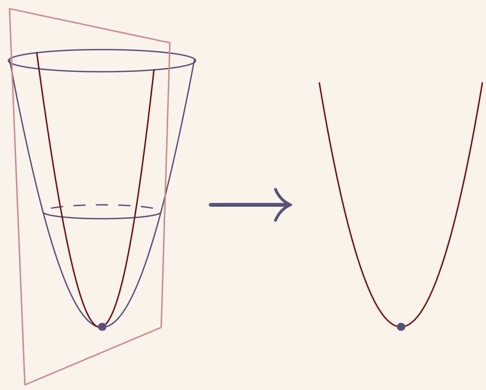
On pose $(a,b) = (1,2)$, $w = (w_1, w_2) = (1,1)$.

$$\begin{aligned} \frac{f(1+t, 2+t) - f(1,2)}{t} &= \frac{1}{t}\left((1+t)(2+t) + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2+t} - 3 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{t}\left(\cancel{2} + 3t + o(t) + \cancel{1} - t + o(t) + \frac{1}{2}\left(\cancel{1} - \frac{t}{2} + o(t)\right) - \cancel{3} - \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\right) \\ &= \frac{1}{t}\left(\frac{7}{4}t + o(t)\right) \\ &= \frac{7}{4} + o(1) \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\mathrm{d}f(1,1)\,(1,2) = \frac{7}{4}.$$

Remarque:



Théorème: Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in U$. On suppose que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent en (a,b) et sont **continues** en (a,b). Alors,

$$\begin{aligned} &\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (a+h, b+k) \in U, \\ &f(a+h,b+k) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \underset{(h,k)\to(0,0)}{o}\big(\|(h,k)\|\big). \end{aligned}$$

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues.

□

Remarque:
En physique, cette formule correspond à :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) - f(x,y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Proposition: Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ en $(a,b) \in U$. Alors,

$$\forall w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{d}f(w)\,(a,b) = w_1\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + w_2\frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

Preuve:
Soit $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $t \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}\big(f(a+tw_1, b+tw_2) - f(a,b)\big) &= \frac{1}{t}\left(tw_1\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + tw_2\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \underset{t\to0}{o}\big(\|tw\|\big)\right) \\ &= w_1\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + w_2\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \underset{t\to0}{o}(1) \\ &\xrightarrow[t\to0]{} w_1\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + w_2\frac{\partial f}{\partial y}(a,b). \end{aligned}$$

□

Définition: Avec les hypothèses précédentes, en posant

$$\nabla f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

on obtient

$$\mathrm{d}f(w)\,(a,b) = \langle w \mid \nabla f(a,b)\rangle$$

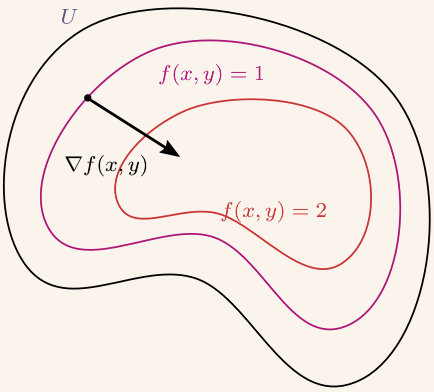
où $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est le produit scalaire.

Le vecteur $\nabla f(a,b)$ est appelé <u>gradient de f en (a,b)</u>.

Le développement limité à l'ordre 1 de f devient

$$f\big((a,b)+w\big) = f(a,b) + \langle w \mid \nabla f(a,b)\rangle + \underset{w\to 0}{o}(\|w\|)$$

Proposition: Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.



∇f est orthogonal au lignes de niveaux de f, son orientation va dans le sens d'une augmentation de f.

Preuve:
Soit $\gamma : I \to U$ une courbe de niveau :

$$\forall t \in I, f\big(\gamma(t)\big) = \text{cste}.$$

D'après le lemme suivant :

$$\forall t \in I, 0 = (f\circ\gamma)'(t) = \mathrm{d}f\big(\gamma'(t)\big)\big(\gamma(t)\big) = \big\langle \gamma'(t) \mid \nabla f\big(\gamma(t)\big)\big\rangle$$

Donc $\nabla f\big(\gamma(t)\big)$ est orthogonal à $\gamma'(t)$.

Pour tout $t \in I$, on pose $w(t) = t\,\nabla f\big(\gamma(t)\big)$. Donc

$$f\big(\gamma(t)+w(t)\big) = f\big(\gamma(t)\big) + t\|\nabla f(\gamma(t))\|^2 + \underset{t\to 0}{o}(t)$$

Pour t assez petit, $f\big(\gamma(t)+w(t)\big) - f\big(\gamma(t)\big)$ est du même signe que t. □

Remarque:

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto -mgz \end{aligned}$$

l'énerge potentielle de pesenteur

On a donc

$$\nabla V(x,y,z) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = (0,0,-mg) = \vec{P}.$$

Lemme: Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, $\gamma : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & U \\ t & \longmapsto & \big(x(t), y(t)\big) \end{array}$ où x et y sont dérivables.

On pose
$$\forall t \in I, \gamma'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big).$$

Alors $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et
$$\begin{aligned}\forall t \in I, (f \circ \gamma)'(t) &= \mathrm{d}f\big(\gamma'(t)\big)\big(\gamma(t)\big) \\ &= \big\langle \gamma'(t) \mid \nabla f\big(\gamma(t)\big)\big\rangle \\ &= x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big).\end{aligned}$$

Preuve:
On fixe $t \in I$.

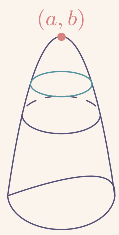
$$\begin{aligned}\forall h \neq 0, \frac{f \circ \gamma(t+h) - f \circ \gamma(t)}{h} &= \frac{1}{h}\big(f(\gamma(t)) + h\gamma'(t) + \underset{h \to 0}{o}(h) - f(\gamma(t))\big) \\ &= \frac{1}{h}\Big(\cancel{f(\gamma(t))} + \big\langle h\gamma'(t) \mid \nabla f(\gamma(t))\big\rangle + \underset{h \to 0}{o}(\|h\gamma'(t)\|) - \cancel{f(\gamma(t))}\Big) \\ &= \big\langle \gamma'(t) \mid \nabla f(\gamma(t))\big\rangle + \underset{h \to 0}{o}(1) \\ &\xrightarrow[h \to 0]{} \big\langle \gamma'(t) \mid \nabla f(\gamma(t))\big\rangle\end{aligned}$$

□

Définition: Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $(a, b) \in U$. On dit que (a, b) est un point critique de f si $\nabla f(a, b) = 0$ i.e. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$.

Dans ce cas, $f(a, b)$ est appelé valeur critique de f.

Proposition:
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $(a, b) \in U$ tel que
$$\exists r > 0, \forall (x, y) \in B_{(a,b)}(r), f(x, y) \leqslant f(a, b)$$
Alors $\nabla f(a, b) = (0, 0)$.



Preuve:
Soit $g : x \mapsto f(x, b)$. $g(a)$ est un maximum local de g donc $g'(a) = 0$.

Or, $g'(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$

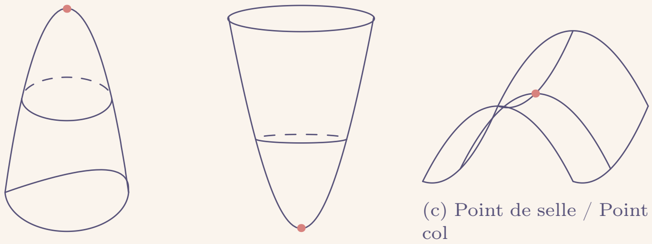
donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$.

Soit $h : y \mapsto f(a, y)$. On a de même $h'(b) = 0$.

Or, $h'(b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

Donc, $\nabla f(a, b) = (0, 0)$. $\square$

Remarque:
Un minimum local est aussi une valeur critique.



(a) Maximum local (b) Minimum local (c) Point de selle / Point col

Exemple:
On revient à l'exemple donné en introduction :

$$\begin{aligned} f : \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 2\left(xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

$\left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x, y) \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$.

On a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2\left(y - \dfrac{1}{x^2}\right), \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2\left(x - \dfrac{1}{y^2}\right). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \\ \iff & \begin{cases} y = \dfrac{1}{x^2} \\ x = \dfrac{1}{y^2} \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} y = \dfrac{1}{x^2} \\ x = x^4 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On vérivie que f présente en effet un minium local en $(1, 1)$.

$$f(1, 1) = 6$$

On fixe $y \in \mathbb{R}_*^+$ et

$$g : x \mapsto 2\left(xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, g'(x) = 2\left(y - \frac{1}{x^2}\right).$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{y}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$2\left(2\sqrt{y}+\frac{1}{y}\right)$	$\nearrow$	

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \forall y \in \mathbb{R}_*^+, f(x,y) \geqslant 2\left(2\sqrt{y}+\frac{1}{y}\right)$$

Soit $h : y \mapsto 2\sqrt{y}+\frac{1}{y}$. On a

$$\forall y > 0, h'(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{y^2} = \frac{y\sqrt{y}-1}{y^2} = \frac{y^{\frac{3}{2}}-1}{y^2}$$

y	0		1		$+\infty$
$h'(y)$		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	3	$\nearrow$	

Donc,

$$\forall x, y > 0, f(x,y) \geqslant 2 \times 3 = 6 = f(1,1).$$

Proposition (règle de la chaîne)**:** Soit $f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$.

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & U \\ (u,v) & \longmapsto & \varphi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big) \end{array}$.

On suppose que x et y sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur V.

Alors, $f \circ \varphi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f\big(\varphi(u,v)\big) \end{array}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\begin{aligned}\forall (u_0,v_0) \in V, \frac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial u}(u_0,v_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(u_0,v_0)\big) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(u_0,v_0)\big)\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall (u_0,v_0) \in V, \frac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial v}(u_0,v_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(u_0,v_0)\big) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(u_0,v_0)\big)\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\end{aligned}$$

Exemple (changement de coordonnées polaires):

On pose

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}_*^+ \times]0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \left(R_*^+ \times \{0\}\right)\\ (r,\theta) &\longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}^2 \setminus \left(R_*^+ \times \{0\}\right) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x,y) &\longmapsto f(x,y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g : \overbrace{\mathbb{R}_*^+ \times]0, 2\pi[}^{=V} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (r,\theta) &\longmapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta).\end{aligned}$$

$\forall (r_0, \theta_0) \in V$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r}(r_0,\theta_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r_0\cos\theta_0, r_0\sin\theta_0)\cos\theta_0\\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(r_0\cos\theta_0, r_0\sin\theta_0)\sin\theta_0\\ &= 2r_0\cos^2\theta_0 + 2r_0\sin^2(\theta_0)\\ &= 2r_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r_0,\theta_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r_0\cos\theta_0, r_0\sin\theta_0)r_0\sin\theta_0\\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(r_0\cos\theta_0, r_0\sin\theta_0)r_0\cos\theta_0\\ &= -2{r_0}^2\cos(\theta_0)\sin(\theta_0) + 2{r_0}^2\sin(\theta_0)\cos(\theta_0)\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc,

$$g(r,\theta) = r^2.$$

Exemple:
Résoudre

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2+y^2},\\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{x^2+y^2}.\end{cases}$$

On pose $g : (r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{1}{r}\cos^2\theta + \frac{1}{r}\sin^2\theta = \frac{1}{r},\\ \frac{\partial g}{\partial \theta} &= -\cos(\theta)\sin(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta) = 0.\end{aligned}$$

Donc,

$$\exists C \in \mathbb{R}, g : (r,\theta) \mapsto \ln r + C$$

d'où,

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, f(x,y) &= \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + C\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C.\end{aligned}$$

Remarque:
Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit $(x, y) \in U$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\nabla f(x,y)\big) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Soit

$$\begin{aligned} \varphi : V &\longrightarrow U \\ (u,v) &\longmapsto \big(x(u,v), y(u,v)\big) \end{aligned}$$

avec x, y de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $g = f \circ \varphi$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\nabla g(u,v)\big) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}}_{J(u,v)} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\ &= J(u,v)\, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\nabla f(x,y)\big) \end{aligned}$$

où $J(u,v) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\nabla x(u,v)\big) \,\vdots\, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\nabla y(u,v)\big)\big)$.

On dit que $J(u,v)$ est <u>la jacobienne</u> de φ en (u,v). L'application linéaire canoniquement associée à $J(u,v)$ est la <u>différentielle de φ</u> en (u,v) noté $\mathrm{d}\varphi(u,v)$.

On a $\mathrm{d}\varphi(u,v) \in \mathscr{L}(R^2)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\mathrm{d}\varphi(u,v)\big) = J(u,v)$.

Par exemple, la jacobienne du changement de coordonnées polaires est

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$\underbrace{\det(J)}_{\text{le jacobien}} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

Dans une intégrale double, si $(x,y) = \varphi(u,v)$, alors $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \det(J)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

Ici,

$$\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta.$$

Preuve:
On pose $(x_0, y_0) = \varphi(u_0, v_0)$. Pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(u_0 + h, v_0 + k) \in V$, en posant $g = f \circ \varphi$.

$$\begin{aligned}
g(u_0+h, v_0+h) &= f\big(x(u_0+h, v_0+k), y(u_0+h, v_0+k)\big) \\
&= f\left(x(u_0,v_0) + h\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) + k\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) + o\left(\|(h,k)\|\right),\right. \\
&\qquad \left. y(u_0,v_0) + h\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) + k\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) + o\left(\|(h,k)\|\right)\right) \\
&= f(x_0,y_0) \\
&\quad + \left(h\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) + k\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) + o(\|(h,k)\|)\right)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\
&\quad + \left(h\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) + k\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) + o(\|(h,k)\|)\right)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\
&\quad + o(\|(h,k)\|) \\
&= f(x_0,y_0) \\
&\quad + h\left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \\
&\quad + k\left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \qquad + o(\|(h,k)\|) \\
&= g(u_0,v_0) + h\frac{\partial g}{\partial u}(u_0,v_0) + k\frac{\partial g}{\partial v}(u_0,v_0) + o(\|(h,k)\|)
\end{aligned}$$

Par identification,

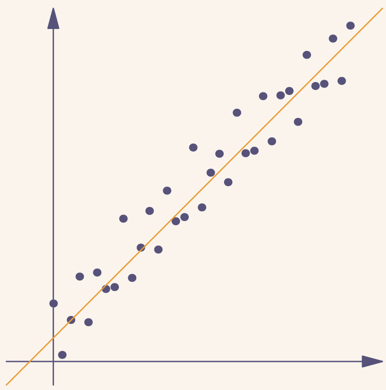
$$\frac{\partial g}{\partial u}(u_0,v_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u_0,v_0) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

□

Exemple (Régression linéaire):



$y = ax + b$

On fixe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varepsilon(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (ax_i + b)\big)^2$$

l'erreur totale.

On veut minimiser $\varepsilon(a,b)$. On a

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial a}(a,b) = -2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)x_i, \\ \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial b}(a,b) = -2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b). \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} (a,b) \text{ point critique de } \varepsilon &\iff \begin{cases} a\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ a\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \overline{x}^2\right) = \overline{y} - \overline{xy} \\ b = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{xy} \end{cases} \\ &\quad \text{où } \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \\ &\iff \begin{cases} a = \dfrac{\mathrm{Cov}(x,y)}{V(x)} \\ b = \overline{y} - a\overline{x} \end{cases} \end{aligned}$$

Coefficient de corrélation : $\dfrac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} \in [-1,1]$