

CHAPITRE 24

Groupe symétrique

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

I	Mise en situation	2
II	Cycles	5
III	Transpositions	8
IV	Signature d'une permutation	10

Définition: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Le groupe symétrique est noté S_n : l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ muni de $\circ$.

$$\#S_n = n!$$

Première partie

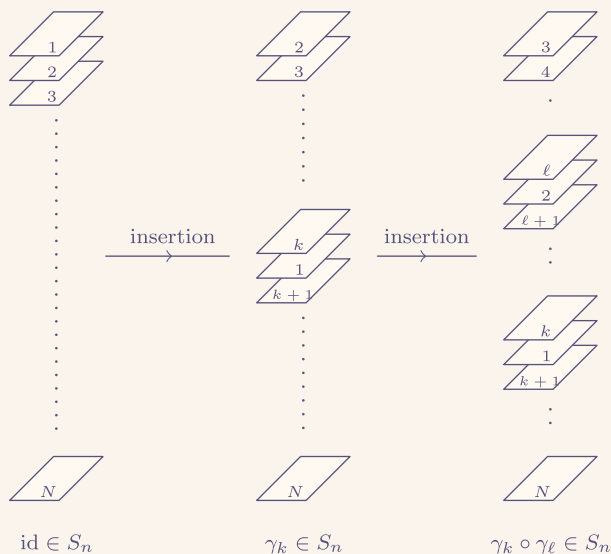
Mise en situation

BON MÉLANGE D'UN JEU DE CARTES :

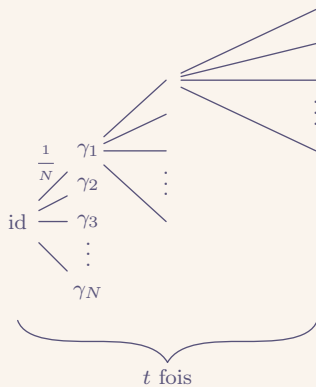
Soit un jeu neuf de N cartes. On procède à un mélange par insertion : on place la carte qui est au-dessus n'importe où dans le paquet, étape que l'on répète t fois.

Pour quelles valeurs de t obtient-on un jeu bien mélangé ?

Modélisation : On numérote les cartes de 1 à N dans l'ordre initial du jeu.



On peut modéliser par un arbre le mélange dont les nœuds sont des permutations des éléments de S_N .



On dit que le jeu est bien mélangé après t insertions si chaque élément de S_N est une feuille de cet arbre et la probabilité d'obtenir cette permutation est $\frac{1}{N!}$.

Avec $N = 4$, on a

$$\begin{array}{l} \gamma_1 = \text{id} \\ \gamma_3 = \begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ 2 & \rightarrow & 1 \\ 3 & & 2 \\ 4 & & 4 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \gamma_2 = \begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ 2 & \rightarrow & 1 \\ 3 & & 3 \\ 4 & & 4 \end{array} \\ \gamma_4 = \begin{array}{ccc} 1 & & 4 \\ 2 & \rightarrow & 1 \\ 3 & & 2 \\ 4 & & 3 \end{array} . \end{array}$$

Avec $k = 2$ et $\ell = 1$,

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 2 & \xrightarrow{\gamma_2 \circ} & 1 \\ 3 & & 3 \\ 4 & & 4 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \underbrace{\hspace{1cm}} \\ & & \gamma_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \\ & \xrightarrow{\gamma_1 \circ} & 1 \\ & & 3 \\ & & 4 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \underbrace{\hspace{1cm}} \\ & & \gamma_2 \end{array}$$

Avec $k = 2$ et $\ell = 2$, on a

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & \rightarrow & 1 \\ 3 & & 3 \\ 4 & & 4 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \rightarrow \\ & & 2 \\ & & 3 \\ & & 4 \end{array} .$$

Et avec $k = 2$ et $\ell = 3$, on a

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & \rightarrow & 1 \\ 3 & & 3 \\ 4 & & 4 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \rightarrow \\ & & 3 \\ & & 2 \\ & & 4 \end{array} .$$

$$\gamma_2 \circ \gamma_3 : \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 2 \\ 4 \mapsto 4 \end{array}$$

Est-ce-que toute permutation peut s'écrire comme un produit des γ_k avec $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$?

Deuxième partie

Cycles

REMARQUE (Notation):
Soit $\sigma \in S_n$.

$$\sigma : \llbracket 1, N \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, N \rrbracket$$

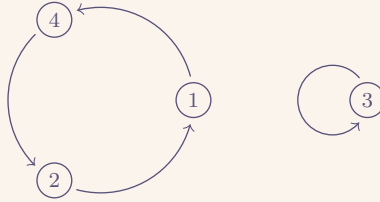
$$i \longmapsto \begin{cases} * & \text{si } i = 1 \\ * & \text{si } i = 2 \\ \vdots & \\ * & \text{si } i = N. \end{cases}$$

On écrit plutôt

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & N \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(N) \end{pmatrix}$$

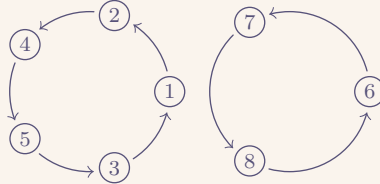
REMARQUE:
Avec $N = 4$ et

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$



Avec $N = 8$ et

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$



Définition: Soit $\sigma \in S_N$ et $x \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

L'orbite de x pour σ est

$$\{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots\} = \{\sigma^i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

On note l'ordre d de σ : si $\sigma \neq \text{id}$, $\begin{cases} \sigma^d = \text{id}, \\ \sigma^{d-1} \neq \text{id}. \end{cases}$ L'orbite de x est

$$\{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{d-1}(x)\}.$$

Les orbites de σ partitionnent $\llbracket 1, N \rrbracket$.

Définition: Soit $\gamma \in S_N$. On dit que γ est un k -cycle si γ a $N - k$ points fixes et les k autres éléments sont dans une même orbite.

REMARQUE (Notation):

Soit γ un k -cycle tel que $\gamma(x) \neq x$. On note

$$\gamma = (x \quad \gamma(x) \quad \gamma^2(x) \quad \dots \quad \gamma^{k-1}(x)).$$

Définition: Soit $\sigma \in S_n$. Le support de σ est

$$\text{Supp}(\sigma) = \{x \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \sigma(x) \neq x\}.$$

Théorème: Toute permutation de S_n est une composée de cycles à supports disjoints et ces cycles sont uniques.

■

Proposition: Soit γ un k -cycle.

Alors l'ordre de γ est k :

$$\begin{cases} \gamma^k = \text{id} \\ \forall \ell \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, \gamma^\ell \neq \text{id} \end{cases}$$

■

Proposition: Soit $\gamma = (a_1 \quad \dots \quad a_k)$ un k -cycle et $\sigma \in S_n$. Alors

$$\sigma\gamma\sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \quad \dots \quad \sigma(a_k))$$

est un k -cycle.

■

Troisième partie

Transpositions

Définition: Une transposition est un cycle de longueur 2 : $(a \ b)$ avec $a \neq b$.

|| **Théorème:** Toute permutation se décompose en produit de transpositions. ■

Quatrième partie

Signature d'une permutation

Définition: Soit $\sigma \in S_n$.

Un inversion de σ est $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

La signature de σ , notée $\varepsilon(\sigma)$ vaut $(-1)^k$ où k est le nombre d'inversions de σ .

Proposition: Soit τ un transposition. Alors $\varepsilon(\tau) = -1$. ■

Théorème: $\varepsilon : (S_n, \circ) \rightarrow (\{-1, 1\}, \times)$ est un morphisme de groupes. ■

Définition: On dit qu'une permutation σ est paire si $\varepsilon(\sigma) = 1$, impaire si $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Proposition – Définition: On note

$$A_n = \{\sigma \in S_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\}.$$

C'est un sous-groupe de S_n : on l'appelle groupe alterné. ■

REMARQUE:

$\#A_n = \frac{n!}{2}$. En effet :

$$\begin{aligned} A_n &\longrightarrow \{\sigma \in S_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\} \\ \sigma &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \sigma \end{aligned}$$

est une bijection.