Chapitre 24

TD

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

Table des matières

Exercice 2

1. Soit $i < j$ avec $i, j \in [\![2, n]\!]$.

$$\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\gamma \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \gamma^{-1}}_{\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

avec $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$.
On pose

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \gamma \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 3 & \cdots & n & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \sigma^{-1} &= \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^k \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \sigma^{-k} &= \begin{pmatrix} \sigma^k(1) & \sigma^k(2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2+k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 5

On note $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_k$ les orbites de σ :

$$[\![1, n]\!] = \dot{\bigcup_{j=1}^{k}} \mathcal{O}_j$$

On pose aussi $\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$ où

$$\forall j \in [\![1, k]\!], \begin{cases} \gamma_j \text{ est un cycle,} \\ \mathrm{Supp}(\gamma_j) = \mathcal{O}_j \text{ si } \#\mathcal{O}_j \geqslant 2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma) &= \prod_{j=1}^{k} \varepsilon(\gamma_j) \\ &= \prod_{j=1}^{k} (-1)^{\#\mathcal{O}_j - 1} \\ &= (-1)^{\sum_{j=1}^{k} (\#\mathcal{O}_j - 1)} \\ &= (-1)^{n-k} \end{aligned}$$

Exercice 3

1. On pose $\sigma = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & c & d \end{pmatrix} \in S_n$.

   $$\forall k \notin \{a, b, c, d\}, \sigma(k) = k.$$

   On suppose $a \neq d$.

   $$\begin{cases} \sigma(a) = b \\ \sigma(b) = a \\ \sigma(c) = d \\ \sigma(d) = c \end{cases}$$

   On suppose $a = d$: $\sigma = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}^2$. Donc,

   $$\begin{cases} \sigma(a) = c \\ \sigma(b) = a \\ \sigma(c) = b \end{cases}$$

   Si $a \neq d$, $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$.
   Si $a = d$, $\sigma = \begin{pmatrix} a & c & b \end{pmatrix}$.
2. Soit $\sigma \in A_n$. On pose $\sigma = \tau_1 \cdot \tau_{2p}$ où $\forall i$, τ_i est un transposition.
   Soit i impaire. Si $\mathrm{Supp}(\tau_i) = \mathrm{Supp}(\tau_{i+1})$, alors $\tau_i = \tau_{i+1}$ et donc $\tau_i \tau_{i+1} = \mathrm{id}$.
   Si $\#\big(\mathrm{Supp}(\tau_i) \cap \mathrm{Supp}(\tau_{i+1})\big) = 1$, alors on peut écrire $\begin{cases} \tau_i = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \\ \tau_{i+1} = \begin{pmatrix} b & c \end{pmatrix} \end{cases}$ avec $\begin{cases} a \neq b \\ b \neq c \\ a \neq c \end{cases}$

   et alors

   $$\tau_i \tau_{i+1} \text{ est un 3-cycle.}$$

Si $\mathrm{Supp}(\tau_i) \cap \mathrm{Supp}(\tau_{i+1}) = \varnothing$, alors on peut écrire $\begin{cases} \tau_i = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \\ \tau_{i+1} = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} \end{cases}$ avec $\begin{cases} a \neq b \\ c \neq d \\ a \neq c \\ a \neq d \\ b \neq c \\ b \neq d \end{cases}$

et alors $\tau_i \tau_{i+1} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & c & d \end{pmatrix}$. Donc σ est un produit de 3-cycles.
Réciproquement, comme ε est un morphisme de groupes, et comme un 3-cycle est de signature 1, tout produit de 3-cycles appartient à A_n.

Exercice 4

$$\begin{cases} 5 \vee 3 \vee 2 = 30 \\ 5 + 3 + 2 = 10 \end{cases}$$

Exercice 6

Il y en a $\dfrac{A_n^k}{k}$. On applique le principe des berges sur l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathscr{A}_{n,k} &\longrightarrow \{k\text{-cycles}\} \\ (a_1, \dots, a_k) &\longmapsto \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 7

On suppose $n > 2$. Soit $\sigma \in Z(S_n)$:

$$\forall \sigma' \in S_n, \sigma\ \sigma' = \sigma'\ \sigma.$$

En particulier,

$$\forall k \in [\![2, n]\!], \sigma \begin{pmatrix} 1 & k \end{pmatrix} \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & k \end{pmatrix}$$

$$\|$$

$$\begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(k) \end{pmatrix}$$

Donc $\sigma(1) \in \{1, k\}\ \forall k$ et donc $\sigma(1) = 1$. On en déduit que

$$\forall k \geqslant 2, \sigma(k) = k$$

et donc $\sigma = \mathrm{id}$.

S_2 est commutatif : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ commute avec id et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 8

<u>Analyse</u> Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in S_n$ tels que $g : \begin{array}{ccc} [\![1, b]\!] & \longrightarrow & [\![0, n-1]\!] \\ k & \longmapsto & \left|f(k) - k\right| \end{array}$ injective. Donc g est bijective et donc

$$\sum_{k=1}^{n} g(k) = \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$\forall k,\ g(k) \equiv f(k) - k \ \ [2]$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} g(k) &\equiv \sum_{k=1}^{n} \big(f(k) - k\big) \ \ [2] \\ &\equiv 0 \ \ [2] \end{aligned}$$

donc

$$n(n-1) \equiv 0 \ \ [4]$$

donc $\begin{cases} n \equiv 0 \ \ [4] \\ n - 1 \equiv 0 \ \ [4] \end{cases}$

<u>Synthèse</u> On suppose $n \equiv 0 \ \ [4]$: $n = 4p$.

$$f = \left(\begin{array}{cccc|cccc|ccccc|ccc} 1 & 2 & \cdots & p & p+1 & p+2 & \cdots & 2p & 2p+1 & 2p+2 & \cdots & 3p-1 & 3p & 3p+1 & \cdots & 4p \\ 4p & 4p-1 & \cdots & 3p+1 & p+1 & 3p & \cdots & 2p+2 & 2p & 2p-1 & \cdots & p+2 & p & p-1 & \cdots & 1 \end{array} \right)$$

$$g = \left(\begin{array}{cccc|cccc|ccccc|ccc} 1 & 2 & \cdots & p & p+1 & p+2 & \cdots & 2p & 2p+1 & 2p+2 & \cdots & 3p-1 & 3p & 3p+1 & \cdots & 4p \\ 4p-1 & 4p-3 & \cdots & 2p+1 & 0 & 2p-2 & \cdots & 2 & 1 & 3 & \cdots & 2p-3 & 2p & 2p+2 & \cdots & ??? \end{array} \right)$$