Chapitre 24

Groupe symétrique

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

Définition: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Le groupe symétrique est noté S_n : l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ muni de $\circ$.

$$\# S_n = n!$$

Première partie

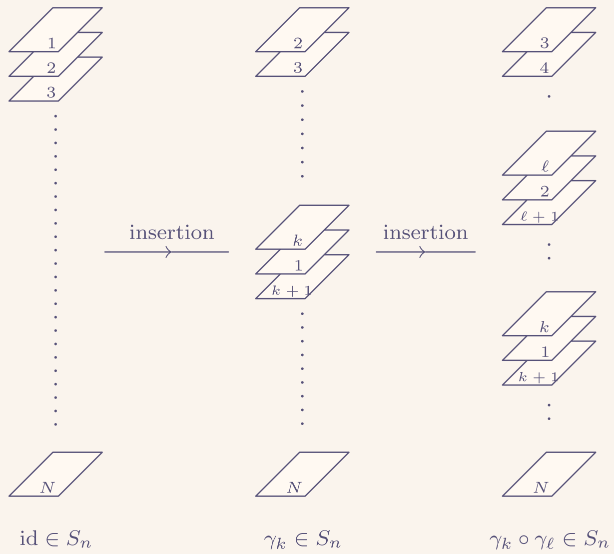
Mise en situation

Bon mélange d'un jeu de cartes :

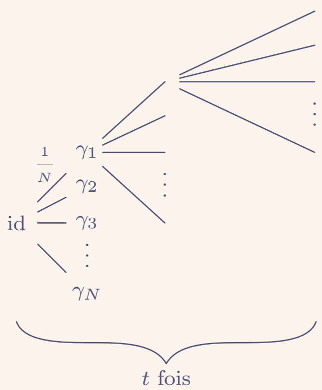
Soit un jeu neuf de N cartes. On procède à un <u>mélange par insertion</u> : on place la carte qui est au-dessus n'importe où dans le paquet, étape que l'on répète t fois.

Pour quelles valeurs de t obtient-on un jeu bien mélangé ?

<u>Modélisation</u> : On numérote les cartes de 1 à N dans l'ordre initial du jeu.



On peut modéliser par un arbre le mélange dont les nœuds sont des permutations des éléments de S_N.



On dit que le jeu est bien mélangé après t insertions si chaque élément de S_N est une <u>feuille</u> de cet arbre et la probabilité d'obtenir cette permutation est $\frac{1}{N!}$.

Avec $N = 4$, on a

$$\gamma_1 = \mathrm{id} \qquad \gamma_2 = \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4 \end{array} \to \begin{array}{c} 2\\1\\3\\4 \end{array}$$

$$\gamma_3 = \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4 \end{array} \to \begin{array}{c} 3\\1\\2\\4 \end{array} \qquad \gamma_4 = \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4 \end{array} \to \begin{array}{c} 4\\1\\2\\3 \end{array}.$$

Avec $k = 2$ et $\ell = 1$,

$$\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4 \end{array} \xrightarrow{\gamma_2 \circ} \underbrace{\begin{array}{c} 2\\1\\3\\4 \end{array}}_{\gamma_2} \xrightarrow{\gamma_1 \circ} \underbrace{\begin{array}{c} 2\\1\\3\\4 \end{array}}_{\gamma_2}$$

Avec $k = 2$ et $\ell = 2$, on a

$$\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4 \end{array} \to \begin{array}{c} 2\\1\\3\\4 \end{array} \to \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4 \end{array}.$$

Et avec $k = 2$ et $\ell = 3$, on a

$$\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4 \end{array} \to \begin{array}{c} 2\\1\\3\\4 \end{array} \to \begin{array}{c} 1\\3\\2\\4 \end{array}.$$

$$\gamma_2 \circ \gamma_3 : \begin{array}{c} 1 \mapsto 1\\ 2 \mapsto 3\\ 3 \mapsto 2\\ 4 \mapsto 4 \end{array}$$

Est-ce-que toute permutation peut s'écrire comme un produit des γ_k avec $k \in [\![1, N]\!]$?

Deuxième partie

Cycles

Remarque (Notation):
Soit $\sigma \in S_n$.

$$\sigma : [\![1, N]\!] \longrightarrow [\![1, N]\!]$$
$$i \longmapsto \begin{cases} * & \text{si } i = 1 \\ * & \text{si } i = 2 \\ & \vdots \\ * & \text{si } i = N. \end{cases}$$

On écrit plutôt

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & N \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(N) \end{pmatrix}$$

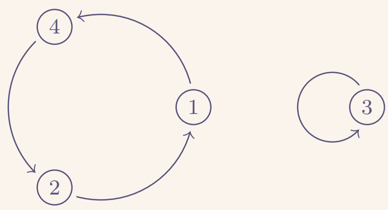
Exemple:
Avec $N = 4$, on a donc

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

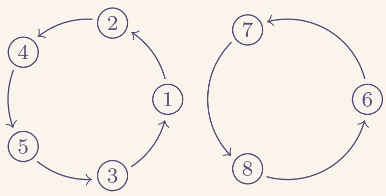
Remarque:
Avec $N = 4$ et

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$



Avec $N = 8$ et

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$



Définition: Soit $\sigma \in S_N$ et $x \in [\![1, N]\!]$.

L'orbite de x pour σ est

$$\{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots\} = \{\sigma^i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

On note l'ordre d de σ : si $\sigma \neq \mathrm{id}$, $\begin{cases} \sigma^d = \mathrm{id}, \\ \sigma^{d-1} \neq \mathrm{id}. \end{cases}$ L'orbite de x est

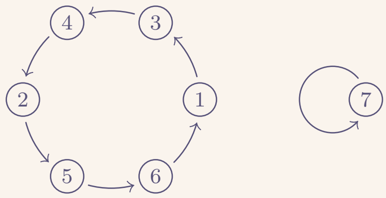
$$\{x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{d-1}(x)\}.$$

Les orbites de σ partitionnent $[\![1, N]\!]$.

Définition: Soit $\gamma \in S_N$. On dit que γ est un <u>k-cycle</u> si γ a $N-k$ points fixes et les k autres éléments sont dans une même orbite.

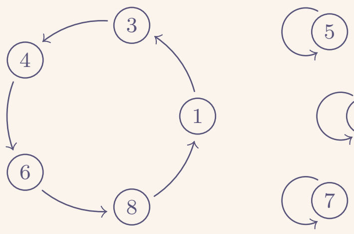
Exemple:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$



σ est un 6-cycle.

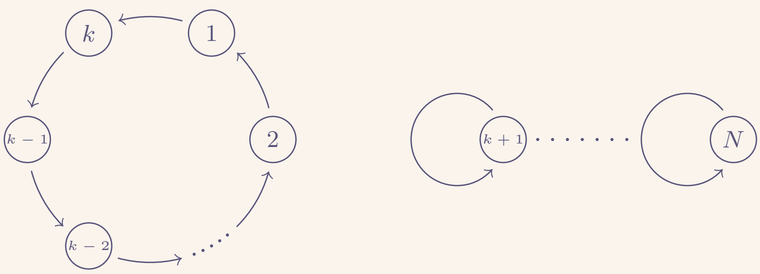
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 5 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$



σ est un 5-cycle.

Exemple:

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & k+1 & \cdots & N \\ k & 1 & 2 & \cdots & k-1 & k+1 & \cdots & N \end{pmatrix}$$



γ_k est un k-cycle.

Remarque (Notation):
Soit γ un k-cycle tel que $\gamma(x) \neq x$. On note

$$\gamma = \begin{pmatrix} x & \gamma(x) & \gamma^2(x) & \cdots & \gamma^{k-1}(x) \end{pmatrix}.$$

Exemple:
Avec

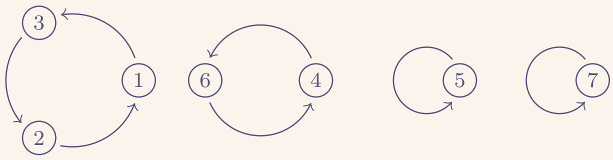
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 5 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 8 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemple:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \sigma.$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \sigma.$$

Exemple:
Avec $N = 4$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition: Soit $\sigma \in S_n$. Le support de σ est

$$\mathrm{Supp}(\sigma) = \{x \in [\![1, n]\!] \mid \sigma(x) \neq x\}.$$

Théorème: Toute permutation de S_n est une composée de cycles à supports disjoints et ces cycles sont uniques.

Exemple:

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 9 & 8 & 1 & 7 & 11 & 3 & 2 & 12 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 10 & 5 & 7 & 3 & 8 & 2 & 9 & 12 & 6 & 11 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemple:

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 4 & 5 & 8 & 2 & 1 & 6 & 3 & 7\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 4 & 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 8 & 7\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Preuve:
Soit $\sigma \in S_n$.

Analyse On suppose que

$$\sigma = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_p$$

où $\forall i \in [\![1,p]\!]$, γ_i est un cycle et $\forall i \neq j, \mathrm{Supp}(\gamma_i) \cap \mathrm{Supp}(\gamma_j) = \varnothing$.
On pose $\gamma_1 = \begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_k\end{pmatrix}$. Donc

$$\begin{aligned}\sigma(a_1) &= \gamma_1 \circ \cdots \circ \gamma_p(a_1)\\ &= \gamma_1 \circ \cdot \circ \gamma_{p-1}(a_1)(\text{ car } a_1 \in \mathrm{Supp}(\gamma_1) \text{ donc } a_1 \notin \mathrm{Supp}(\gamma_p))\\ &\vdots\\ &= \gamma_1(a_1) = a_2.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\sigma(a_2) &= \gamma_1(a_2) = a_3\\ &\vdots\\ \sigma(a_{k-1}) &= \gamma_1(a_{k-1}) = a_k\\ \sigma(a_k) &= \gamma_1(a_k) = a_1\end{aligned}$$

De même,

$$\forall i \in [\![1,p]\!]\,,\ \mathrm{Supp}(\gamma_i) \text{ est un orbite de } \sigma.$$

En d'autres termes, si σ a pour orbites $O(x_1), O(x_2), \ldots, O(x_p), \{\{x_{p+1}\}, \ldots, \{x_q\}\}$ avec $x_1, \ldots, x_p \in \mathrm{Supp}(\sigma)$ alors

$$\begin{cases}\gamma_1 = \begin{pmatrix}x_1 & \sigma(x_1) & \sigma^2(x_1) & \cdots\end{pmatrix}\\ \gamma_2 = \begin{pmatrix}x_2 & \sigma(x_2) & \sigma^2(x_2) & \cdots\end{pmatrix}\\ \quad\vdots\\ \gamma_p = \begin{pmatrix}x_p & \sigma(x_p) & \sigma^2(x_p) & \cdots\end{pmatrix}\end{cases}$$

Synthèse ok !

□

Proposition: Soit γ un k-cycle.
Alors l'ordre de γ est k :

$$\begin{cases}\gamma^k = \mathrm{id}\\ \forall \ell \in [\![1, k-1]\!]\,, \gamma^\ell \neq \mathrm{id}\end{cases}$$

Preuve:

On pose $\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \end{pmatrix}$ avec
$$\forall i \neq j, a_i \neq a_j.$$
Soit $\ell \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$. Alors
$$\gamma^\ell = a_{1+\ell} \neq a_1 \text{ car } 1+\ell \leqslant k$$
donc $\gamma^\ell \neq \mathrm{id}$.

Soit $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Alors
$$\gamma^k(a_i) = a_j$$
avec $\begin{cases} j \in \llbracket 1, k \rrbracket \\ j \equiv i + k \quad [k] \end{cases}$ donc $a_j = a_i$.
$$\forall x \notin \{a_1, \ldots, a_k\}, \gamma(x) = x$$
donc $\gamma^k(x) = x$ et donc $\gamma^k = \mathrm{id}$. □

Proposition: Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_k \end{pmatrix}$ un k-cycle et $\sigma \in S_n$. Alors
$$\sigma\gamma\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(a_1) & \cdots & \sigma(a_k) \end{pmatrix}$$
est un k-cycle.

Preuve:
Soit $x \notin \{\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_k)\}$. σ est bijective : soit $y \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\sigma(y) = x$.

De plus, $y \notin \{a_1, \ldots, a_k\}$.

D'où
$$\begin{aligned} \sigma\gamma\sigma^{-1} &= \sigma\gamma\sigma^{-1}\big(\sigma(y)\big) \\ &= \sigma\gamma(y) \\ &= \sigma(y) \\ &= x. \end{aligned}$$

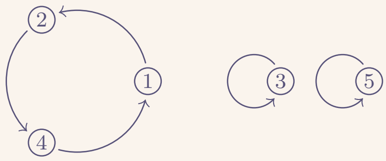
Soit $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$.
$$\sigma\gamma\sigma^{-1}\big(\sigma(a_i)\big) = \sigma\gamma(a_i) = \sigma(a_{i+1})$$
$$\sigma\gamma\sigma^{-1}\big(\sigma(a_k)\big) = \sigma\gamma(a_k) = \sigma(a_1).$$
□

Troisième partie

Transpositions

> **Définition:** Une transposition est un cycle de longueur 2 : $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ avec $a \neq b$.

Exemple:
Avec $n = 5$ et $\gamma = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.



$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Avec $n = 6$ et $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Donc,

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Et,

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On n'a pas toujours le même nombre de transpositions mais la parité du nombre reste la même (proposition plus loin).

> **Théorème:** Toute permutation se décompose en produit de transpositions.

Preuve:
Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_k \end{pmatrix}$ un k-cycle.

On remarque que

$$\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_k \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_1 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

C'est un produit de transpositions. $\square$

Exemple:
Avec $n = 10$ et $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 8 & 1 & 7 & 2 & 3 & 4 & 5 & 10 & 6 \end{pmatrix}$.

On a

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{pmatrix}1 & 9 & 10 & 6 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 8 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 7\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 7\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Vérification :

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\ 1 & 2 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 & 8 & 9 & 10\\ 1 & 8 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 & 2 & 9 & 10\\ 1 & 8 & 3 & 7 & 2 & 6 & 4 & 5 & 9 & 10\\ 9 & 8 & 3 & 7 & 2 & 6 & 4 & 5 & 1 & 10\\ 9 & 8 & 3 & 7 & 2 & 6 & 4 & 5 & 10 & 1\\ 9 & 8 & 3 & 7 & 2 & 1 & 4 & 5 & 10 & 6\\ 9 & 8 & 1 & 7 & 2 & 3 & 4 & 5 & 10 & 6\end{pmatrix}$$

Quatrième partie

Signature d'une permutation

Définition: Soit $\sigma \in S_n$.

Un <u>inversion</u> de σ est $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

La <u>signature</u> de σ, notée $\varepsilon(\sigma)$ vaut $(-1)^k$ où k est le nombre d'inversions de σ.

Exemple:
Avec $n = 10$ et $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 8 & 1 & 7 & 2 & 3 & 4 & 5 & 10 & 6 \end{pmatrix}$.

Les inversions de σ sont $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,6)$, $(1,7)$, $(1,8)$, $(1,10)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(2,6)$, $(2,7)$, $(2,8)$, $(2,10)$, $(4,5)$, $(4,6)$, $(4,7)$, $(4,8)$, $(4,10)$, $(9,10)$.

Donc, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{21} = -1$.

Proposition: Soit τ un transposition. Alors $\varepsilon(\tau) = -1$.

Preuve:
On pose $\tau = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ avec $a < b$.

Donc
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & a & \cdots & b & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & b & \cdots & a & \cdots & n \end{pmatrix}$$

τ a pour inversion $(a, a+1)$, $(a, a+2)$, $\ldots$, (a,b), $(a+1,b)$, $(a+2,b)$, $\ldots$, $(b-1,b)$.

Donc
$$\varepsilon(\tau) = (-1)^{b-a+b-a+1} = (-1)^{2(b-a)+1} = -1.$$

$\square$

Théorème: $\varepsilon : (S_n, \circ) \to \big(\{-1,1\}, \times\big)$ est un morphisme de groupes.

Preuve:
Soient $(\sigma_1, \sigma_2) \in (S_n)^2$. On a
$$\varepsilon(\sigma_1) = \prod_{i<j} \frac{\sigma_1(i) - \sigma_1(j)}{i-j}$$

donc
$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma_1\sigma_2) &= \prod_{i<j} \frac{\sigma_1\sigma_2(i) - \sigma_1\sigma_2(j)}{i-j} \\ &= \prod_{i<j} \frac{\sigma_1(\sigma_2(i)) - \sigma_1(\sigma_2(j))}{\sigma_2(i) - \sigma_2(j)} \times \frac{\sigma_2(i) - \sigma_2(j)}{i-j} \\ &= \prod_{\substack{k,\ell \\ {\sigma_2}^{-1}(k) < {\sigma_2}^{-1}(\ell)}} \frac{\sigma_1(k) - \sigma_1(\ell)}{k-\ell} \times \varepsilon(\sigma_2) \\ &= \prod_{i<j} \frac{\sigma_1(i) - \sigma_1(j)}{i-j} \times \varepsilon(\sigma_2) \\ &= \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2). \end{aligned}$$

□

Définition: On dit qu'une permutation σ est paire si $\varepsilon(\sigma) = 1$, impaire si $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Proposition – Définition: On note

$$A_n = \{\sigma \in S_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\}.$$

C'est un sous-groupe de S_n : on l'appelle groupe alterné.

Preuve:
$A_n = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ □

EXEMPLE:
Avec

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned}\prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} &= \frac{\cancel{(3-1)(2-1)(5-1)(4-1)}}{\cancel{(2-1)(3-1)(4-1)(5-1)}} \\ &\times \frac{\cancel{(2-3)(5-3)(4-3)}}{\cancel{(3-2)(4-2)(5-2)}} \\ &\times \frac{\cancel{(5-2)(4-2)}}{\cancel{(4-3)(5-3)}} \\ &\times \frac{4-5}{5-4} \\ &= -1.\end{aligned}$$

REMARQUE:
$\#A_n = \dfrac{n!}{2}$. En effet :

$$\begin{aligned} A_n &\longrightarrow \{\sigma \in S_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\} \\ \sigma &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \sigma \end{aligned}$$

est une bijection.

EXERCICE:
Problème :

Soit $\sigma \in S_n$. σ est-il un produit des cycles $\gamma_k = \begin{pmatrix} k & k-1 & k-2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ avec $k \in [\![1, N]\!]$?

Avec $N = 5$ et $\gamma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \gamma_4 &= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \gamma_5 &= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\
3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\
2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\
1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\
2 & 3 & 5 & 1 & 4 \\
1 & 2 & 5 & 4 & 3 \\
3 & 1 & 5 & 4 & 2 \\
2 & 3 & 5 & 4 & 1 \\
1 & 3 & 5 & 4 & 2
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\
\gamma_3 \\
\gamma_2 \\
\gamma_5 \\
\gamma_3 \\
\gamma_2 \\
\gamma_4 \\
\gamma_3 \\
\gamma_3 \\
\gamma_2
\end{array}$$

Cinquième partie

Bilan

$\#S_n = n!$.

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

On dit que d est l'ordre de σ si
$$\begin{cases} \sigma^d = \mathrm{id}; \\ \forall i \in [\![1, d-1]\!]\,,\ \sigma^i \neq \mathrm{id}\,. \end{cases}$$

L'orbite de σ pour $x \in [\![1, n]\!]$ est
$$\{\, x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{d-1}(x) \,\}$$
où d est l'ordre de σ.

On dit que σ est un k-cycle si
- σ a $n-k$ points fixes ;
- les autres éléments sont dans une même orbite.

Dans ce cas, σ est noté
$\sigma = \begin{pmatrix} x & \sigma(x) & \sigma^2(x) & \cdots & \sigma^{k-1}(x) \end{pmatrix}$
et l'ordre de σ est k.

Le support de σ est l'ensemble des éléments qui "changent" après l'application de σ :
$$\mathrm{Supp}(\sigma) = \big\{x \in [\![1, n]\!] \mid \sigma(x) \neq x\big\}.$$

Toute permutation peut être décomposée, de manière unique, en cycles à supports disjoints.

Soit γ un k-cycle :
$$\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n - k \end{pmatrix}.$$
Alors, pour toute permutation σ,
$$\sigma\gamma\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(a_1) & \cdots & \sigma(a_k) \end{pmatrix} I$$
et c'est un k-cycle.

Une transposition est un cycle de longueur 2.

Toute permutation se décompose en produit de transpositions mais cette décomposition n'est pas unique.

Une inversion est un couple (i, j) avec $i < j$ mais $\sigma(i) > \sigma(j)$.

La signature d'une permutation σ est $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$ où k est le nombre d'inversions. C'est un morphisme de groupes donc
$$\varepsilon\left(\prod_{i=1}^{N} \sigma_i\right) = \prod_{i=1}^{N} \varepsilon(\sigma_i).$$
La signature d'une transposition est -1.

Une permutation paire est une permutation de signature 1.

Une permutation impaire est une permutation de signature -1.

L'ensemble des permutations paires forment un sous-groupe : le groupe alterné.