Chapitre 25

Série

Hugo Salou MP2I
Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Défintions et premières propriétés

Définition: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La suite des sommes partielles associée à (u_n) est

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Étudier la série des (u_n), c'est étudier la convergence de la suite (S_n).
On dit que la série $\sum u_n$ converge si (S_n) converge. Dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ et on l'appelle la somme de la série, et la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

est appelée suite des restes partiels.

Proposition: Soit $(v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
La série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge si et seulement si (v_n).

■

Proposition: Soit $\sum u_n$ une série.
SI $\sum u_n$ converge ALORS $u_n \longrightarrow 0$.

REMARQUE:
La réciproque est FAUSSE.

■

REMARQUE:
Avec les notations précédentes, si $u_n \not\longrightarrow 0$, alors $\sum u_n$ diverge. On dit qu'elle diverge grossièrement.

Deuxième partie

Séries à termes positifs

Proposition: Soit $(u_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}$. Alors $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

■

Théorème: Soient u et v deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{0 \leqslant u_n} \leqslant v_n.$$

1. SI $\sum v_n$ converge, ALORS $\sum u_n$ converge
2. SI $\sum u_n$ diverge, ALORS $\sum v_n$ diverge.

■

Corollaire: Soient u, v deux suites réelles POSITIVES telles que $u = O(v)$.

1. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

□

Théorème: Soient u et v deux suites réelles POSITIVES telles que $u = o(v)$.

1. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

□

Théorème (règle des équivalents)**:** Soient u et v deux suites réelles POSITIVES telles que $u \sim v$. Alors

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum v_n \text{ converge.}$$

■

Troisième partie

Comparaison avec une intégrale

Théorème: Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1$$

Dans ce cas, on note

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

■

Théorème: Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue, décroissante de limite nulle, avec $a \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\sum_{n \geqslant a} f(n) \text{ converge } \iff \left(\int_a^n f(x) \, \mathrm{d}x \right)_n \text{ converge.}$$

■

Quatrième partie

Opérations sur les séries

Proposition: L'ensemble $E = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n \text{ converge}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et

$$\begin{aligned} S : E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ u &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{aligned}$$

est une forme linéaire. $\square$

Remarque:
La somme d'une série convergente et d'une série divergente diverge. Le produit d'une série divergente par un scalaire non nul diverge.

Cinquième partie

Séries absolument convergente

Théorème: Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. SI $\sum |u_n|$ converge, ALORS $\sum u_n$ converge.

REMARQUE:
La réciproque est FAUSSE. On a vu en exercice que la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge vers $\ln 2$, alors que $\sum \frac{1}{n}$ diverge. ■

Définition: Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge. On dit que $\sum u_n$ est semi-convergente si

$$\begin{cases} \sum u_n \text{ converge,} \\ \sum |u_n| \text{ diverge.} \end{cases}$$

Corollaire: Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}$ telles que $u = O(v)$.
Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument. □

Sixième partie

Séries alternées

Théorème: Soit $u \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle. Alors $\sum(-1)^n u_n$ converge.

■

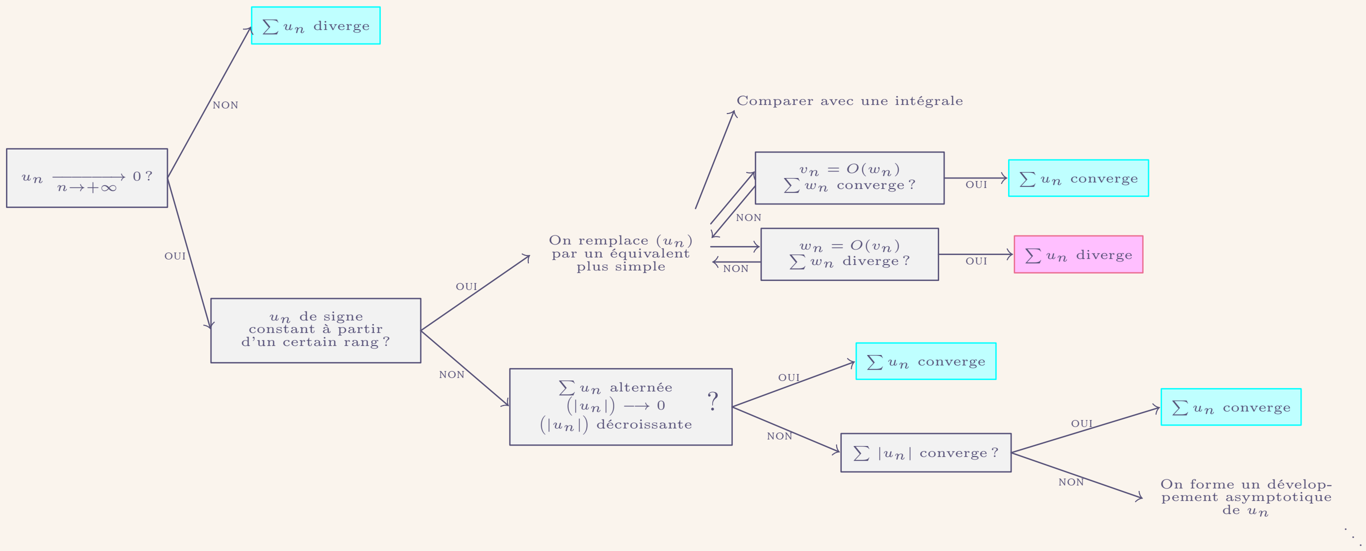
Proposition: Soit u une suite de signe constant telle que $\left(|u_n|\right)_n$ est décroissante de limite nulle. Alors, $\sum(-1)^n u_n$ converge et

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n \text{ est du signe de } (-1)^{n+1}u_{n+1} \text{ et } |R_n| \leqslant |u_n|$$

□

Septième partie

Résumé et exemples


$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$?
NON
$\sum u_n$ diverge
OUI
u_n de signe constant à partir d'un certain rang ?
OUI
On remplace (u_n) par un équivalent plus simple
Comparer avec une intégrale
$v_n = O(w_n)$ $\sum w_n$ converge ?
OUI
$\sum u_n$ converge
NON
$w_n = O(v_n)$ $\sum w_n$ diverge ?
OUI
$\sum u_n$ diverge
NON
NON
$\sum u_n$ alternée $(|u_n|) \longrightarrow 0$ $(|u_n|)$ décroissante ?
OUI
$\sum u_n$ converge
NON
$\sum |u_n|$ converge ?
OUI
$\sum u_n$ converge
NON
On forme un dévelop-pement asymptotique de u_n
...

Huitième partie

Applications

VIII.1 Formule de Stirling

Proposition: On a :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n ?.$$

■

VIII.2 Développement décimal

Proposition: Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} a_0 \in \mathbb{Z}, \\ \forall n \geqslant 1, a_n \in [\![0,9]\!] \end{cases}$$

La série $\sum \dfrac{a_n}{10^n}$ converge.

■

Définition: Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que x admet un <u>développement décimal</u> si

$$\exists a_0 \in \mathbb{Z}, (a_n)_{n\geqslant 1} \in [\![0,9]\!]^N, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

Théorème: Tou réel $x \in [0,1[$ admet un développement décimal :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor 10^n x\rfloor - 10\left\lfloor 10^{n-1}x\right\rfloor}{10^n}$$

■

Théorème: Soit $x \in]0,1[$.

1. Si x n'est pas décimal (i.e. on ne peut pas l'écrire comme $p/10^n$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$), alors x a un unique développement décimal.
2. Si x est décimal, alors x a exactement 2 développements décimaux :
   — il y en a un où, à partir d'un certain rang, tous les chiffres sont nuls,
   — et un autre où tous les chiffres sont égaux à 9 à parir d'un certain rang.

■

Remarque:
Avec $x = 0{,}54\underline{54}\ldots$, $100x = 54{,}54\underline{54}\ldots = 54 + x$. On a donc $x = \dfrac{54}{99}$.

Avec $x = 0{,}987\,123\,\underline{123}\ldots$, on a

$$\begin{aligned} x &= \frac{987}{1000} + 0{,}000\,\underline{123}\ldots \\ &= \frac{987}{1000} + \frac{1}{10^3}\underbrace{(0{,}\underline{123}\ldots)}_{y} \end{aligned}$$

On a $1000y = 123 + y$ et donc $y = \dfrac{123}{999}$ et donc $x = \dfrac{987 + \frac{123}{999}}{1000}$.

VIII.3 Exponentielle

Proposition:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

■

Proposition:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

□