Chapitre 27

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

I Définitions **2**

II Probabilité conditionnelle **4**

III Événements indépendants **7**

Première partie

Définitions

Définition: Soit Ω un ensemble fini. Une probabilité sur Ω est une application

$$P : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$

telle que

1. $P(\Omega) = 1$,
2. $\forall A, B \in \mathscr{P}(W),\ A \cap B = \varnothing \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Dans ce cas, on dit que (Ω, P) est un espace probabilisé.

Définition: Soit (Ω, P) un espace probabilisé.

L'ensemble Ω est appelé univers, les singletons $\{\omega\}$ avec $\omega \in \Omega$ sont appelés événements élémentaires, les parties de Ω sont appelées événements, $\varnothing$ est appelé événement impossible et Ω est appelé événement certain.

Soient $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$. On dit que A et B sont incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.

Proposition: Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un ensemble de cardinal n et $(p_1, \ldots, p_n) \in [0,1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Il existe une unique probabilité P sur Ω que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P\big(\{\omega_i\}\big) = p_i.$$

■

Lemme: Soit P une probabilité sur Ω et $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'événements 2 à 2 incompatibles. Alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

■

Proposition: Soit P une probabilitésur Ω.

1. $P(\varnothing) = 0$;
2. $\forall A, B \in \mathscr{P}(\Omega),\ A \subset B \implies P(A) \leqslant P(B)$;
3. $\forall A, B \in \mathscr{P}(\Omega),\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

■

Deuxième partie

Probabilité conditionnelle

Proposition – Définition: Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(A) \neq 0$.

L'application

$$\begin{aligned} \mathscr{P}(\Omega) &\longrightarrow [0,1] \\ X &\longmapsto \frac{P(A \cap X)}{P(A)} \end{aligned}$$

est une probabilité. Elle est notée P_A et est appelée probabilité sachant A.

Elle est parfois notée $P(A \mid B)$.

■

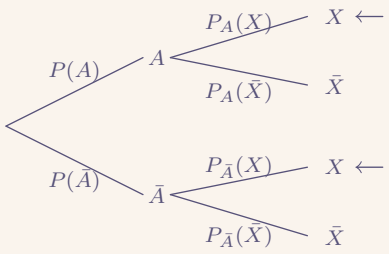
Proposition: Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(A) \neq 0$.

$$\forall X \in \mathscr{P}(\Omega),\ P(A \cap X) = P(A)\, P_A(X).$$

□

Proposition: Soit (Ω, P) un espace probabilisé, $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(A) \in]0,1[$.

$$\forall X \in \mathscr{P}(\Omega),\ P(X) = P(A)\, P_A(X) + P\left(\bar{A}\right)\, P_{\bar{A}}(X).$$



■

Définition: Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Un système complet d'événements est une partition de Ω.

Proposition (probabilités totales)**:** Soit (Ω, P) un espace probabilisé, $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système complet d'événements tel que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(A_i) > 0.$$

Alors,

$$\forall x \in \mathscr{P}(\Omega),\ P(X) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(X).$$

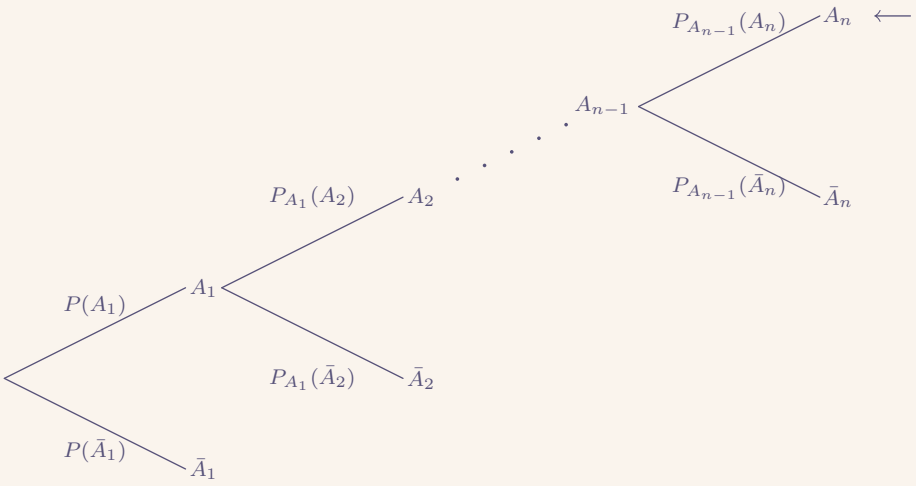
■

Proposition (probabilités composées)**:** Soit (Ω, P) un espace probabilisé, $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des événements tels que

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0.$$

Alors,

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1\cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$



■

Proposition (Bayes)**:** Soit (Ω, P) un espace probabilisé, $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \in]0,1[$.

$$P_A(B) = \frac{P_B(A)\ P(B)}{P(A)} = \frac{P_B(A)\ P(B)}{P_B(A)\, P(B) + P_{\bar{B}}(A)\, P\left(\bar{B}\right)}.$$

□

Remarque:
On appèle $P_A(B)$ la vraissemblance (*likelyhood* en anglais), $P(A)$ la probabilité a-priori (*prior distribution*), et $P_B(A)$ la probabilité a-posteriori (*posterior distribution*).

Proposition (Bayes)**:** Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_k)_{k\in K}$ un système complet d'événements tel que

$$\forall k \in K,\ P(A_k) \neq 0.$$

Soit $X \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(X) \neq 0$. On a

$$\forall k \in K,\ P_X(A_k) = \frac{P_{A_k}(X)\, P(A_k)}{\sum_{j\in K} P_{A_j}(X) P(A_j)}.$$

□

Troisième partie

Événements indépendants

Définition: Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, P). On dit que A et B sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B).$$

Remarque:
L'indépendance d'événements au sens mathématique n'est pas la même chose que l'indépendance dans le sens commun : elle dépend de la probabilité utilisé !

Définition: Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie d'événements.

1. On dit que ces événements sont 2 à 2 indépendants si
$$\forall i \neq j, \quad P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\,P(A_j)$$
2. On dit qu'ils sont mutuellement indépendants si
$$\forall J \in \mathscr{P}(I) \setminus \{\varnothing\}, \quad P\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \prod_{j\in J} P(A_j).$$

Proposition: Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements mutuellement indépendants. Soit $J \in \mathscr{P}(I)$ et on pose

$$\forall i \in I,\ B_i = \begin{cases} \bar{A}_i & \text{si } i \in J \\ A_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, $(B_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

■