Chapitre 27

$\mathcal{E}$/

Hugo Salou MP2I
Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

I Définitions 2

II Probabilité conditionnelle 6

III Événements indépendants 14

IV Bilan 18

Première partie

Définitions

Définition: Soit Ω un ensemble fini. Une probabilité sur Ω est une application

$$P : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$

telle que

1. $P(\Omega) = 1$,
2. $\forall A, B \in \mathscr{P}(W),\ A \cap B = \varnothing \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Dans ce cas, on dit que (Ω, P) est un espace probabilisé.

Exemple (équiprobabilité):
Soit Ω un ensemble fini non vide. Soit

$$\begin{aligned} P : \mathscr{P}(\Omega) &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto \frac{\#A}{\#\Omega}. \end{aligned}$$

En effet,

1. $P(\Omega) = \dfrac{\#\Omega}{\#\Omega} = 1$.
2. Soient $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ avec $A \cap B = \varnothing$.

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{\#(A \cup B)}{\#\Omega} \\ &= \frac{\#A + \#B}{\#\Omega} \\ &= P(A) + P(B) \end{aligned}$$

De plus, on pose $n = \#\Omega$.

$$\forall \omega \in \Omega, P\big(\{\omega\}\big) = \frac{1}{n} \text{ et ne dépend pas de } \omega.$$

Définition: Soit (Ω, P) un espace probabilisé.

L'ensemble Ω est appelé univers, les singletons $\{\omega\}$ avec $\omega \in \Omega$ sont appelés événements élémentaires, les parties de Ω sont appelées événements, $\varnothing$ est appelé événement impossible et Ω est appelé événement certain.

Soient $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$. On dit que A et B sont incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.

Proposition: Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un ensemble de cardinal n et $(p_1, \ldots, p_n) \in [0,1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Il existe une unique probabilité P sur Ω que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P\big(\{\omega_i\}\big) = p_i.$$

Preuve: Existence On pose

$$\begin{aligned} P : \mathscr{P}(\Omega) &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto \sum_{i \in I_A} p_i \end{aligned}$$

où $I_A = \big\{ i \in [\![1, n]\!] \mid \omega_i \in A \big\}$.

— Soit $a \in \mathscr{P}(\Omega)$.

$$0 \leqslant P(A) = \sum_{i \in I_A} p_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

— $P(\Omega) = \sum_{i \in I_\Omega} p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

— Soient $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ incompatibles.

$$\begin{aligned} I_{A \cup B} &= \{i \in [\![1, n]\!], \omega_i \in A \cup B\} \\ &= I_A \cupdot I_B \end{aligned}$$

$$P(A \cup B) = \sum_{i \in I_{A \cup B}} p_i = \sum_{i \in I_A} p_i + \sum_{i \in I_B} p_i = P(A) + P(B).$$

Unicité Soit Q une probabilité sur Ω tel que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], Q\big(\{\omega_i\}\big) = p_i.$$

Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.

$$A = \bigcupdot_{\omega \in A} \{\omega\} = \bigcupdot_{i \in I_A} \{\omega_i\}.$$

En utilisant le lemme suivant,

$$\begin{aligned} Q(A) &= Q\left(\bigcupdot_{i \in I_A} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i \in I_A} Q\big(\{\omega_i\}\big) \\ &= \sum_{i \in I_A} p_i = P(A). \end{aligned}$$

□

Lemme: Soit P une probabilité sur Ω et $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'événements 2 à 2 incompatibles. Alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Preuve:
par récurrence sur n. □

Proposition: Soit P une probabilitésur Ω.

1. $P(\varnothing) = 0$;
2. $\forall A, B \in \mathscr{P}(\Omega),\ A \subset B \implies P(A) \leqslant P(B)$;
3. $\forall A, B \in \mathscr{P}(\Omega),\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Preuve: 1. $\Omega = \varnothing \cupdot \Omega$ donc $P(\Omega) = P(\varnothing) + P(\Omega)$ donc $P(\varnothing) = 0$.

2. Soient $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ avec $A \subset B$. On pose $C = B \setminus A$:

$$\begin{cases} B = A \cup C; \\ A \cap C = \varnothing. \end{cases}$$

Donc, $P(B) = P(A) + \underbrace{P(C)}_{\geqslant 0} \geqslant P(A)$.

3. On pose $\begin{cases} A' = A \setminus (A \cap B), \\ B' = B \setminus (A \cap B), \\ C = A \cap B. \end{cases}$

$$\begin{cases} A' \cup B' \cup C = A \cup B \\ A' \cap C = B' \cap C = A' \cap B' = \varnothing \end{cases}$$

donc

$$P(A \cup B) = P(A') + P(B') + P(C).$$

De plus,

$$\begin{cases} A = A' \uplus C \text{ donc } P(A) = P(A') + P(C); \\ B = B' \uplus C \text{ donc } P(B) = P(B') + P(C). \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) - P(C) + P(B) - \cancel{P(C)} + \cancel{P(C)} \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

$\square$

Deuxième partie

Probabilité conditionnelle

Proposition – Définition: Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(A) \neq 0$.

L'application

$$\begin{aligned} \mathscr{P}(\Omega) &\longrightarrow [0,1] \\ X &\longmapsto \frac{P(A \cap X)}{P(A)} \end{aligned}$$

est une probabilité. Elle est notée P_A et est appelée probabilité sachant A.

Elle est parfois notée $P(A \mid B)$.

Preuve: — Soit $X \in P(\Omega)$.

$$0 \leqslant P(A \cap X) \leqslant P(A) \text{ car } A \cap X \subset A$$

Comme $P(A) > 0$,

$$0 \leqslant \frac{P(A \cap X)}{P(A)} \leqslant 1$$

—

$$\frac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

— Soient $X, Y \in P(\Omega)$ avec $X \cap Y = \varnothing$.

$$\begin{aligned} \frac{P\big(A \cap (X \cup Y)\big)}{P(A)} &= \frac{P\big((X \cap A) \uplus (Y \cap A)\big)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A \cap X) + P(A \cap Y)}{P(A)} \end{aligned}$$

□

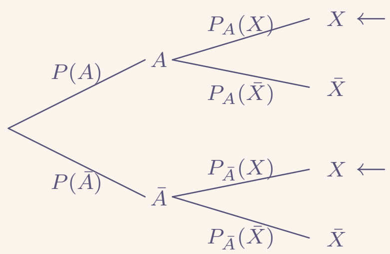
Proposition: Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(A) \neq 0$.

$$\forall X \in \mathscr{P}(\Omega),\ P(A \cap X) = P(A)\ P_A(X).$$

□

Proposition: Soit (Ω, P) un espace probabilisé, $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(A) \in \,]0,1[$.

$$\forall X \in \mathscr{P}(\Omega),\ P(X) = P(A)\, P_A(X) + P\left(\bar{A}\right)\ P_{\bar{A}}(X).$$



Preuve:
Soit $X \in \mathscr{P}(\Omega)$.

$$\begin{aligned} X &= X \cap \Omega \\ &= X \cap \left(A \cup \bar{A}\right) \\ &= (X \cap A) \cup \left(X \cap \bar{A}\right) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} P(X) &= P(X \cap A) + P\left(X \cap \bar{A}\right) \\ &= P(A)\, P_A(X) + P\left(\bar{A}\right)\, P_{\bar{A}}(X). \end{aligned}$$

□

Définition: Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Un système complet d'événements est une partition de Ω.

Proposition (probabilités totales)**:** Soit (Ω, P) un espace probabilisé, $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un système complet d'événements tel que

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ P(A_i) > 0.$$

Alors,

$$\forall x \in \mathscr{P}(\Omega),\ P(X) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(X).$$

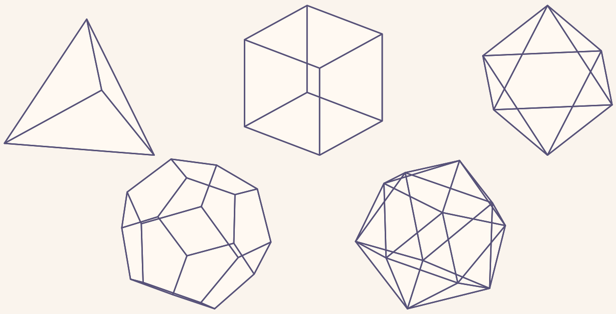
Preuve:
Soit $X \in \mathscr{P}(\Omega)$.

$$\begin{aligned} P(X) &= P(X \cap \Omega) \\ &= P\left(X \cap \left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} A_i\right)\right) \\ &= P\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} (X \cap A_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(X \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(X) \end{aligned}$$

□

Exemple:
On dispose de 5 dés : un à 4 faces, un à 6 faces, un à 8 faces, un à 8 faces, un à 12 faces et un à 20 faces que l'on suppose bien équilibré.

Pour qu'un dé soit bien équilibré, il faut que ce soit un polyèdre régulier, aussi appelé polyèdre de Platon. Il y en a 5 : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre, et l'icosaèdre.



On choisit au hasard l'un de ces dés, on le lance et on note le résultat.

Quelle est la probabilité que ce résultat soit égal à 7 ?

Modélisation 1 : $\Omega = [\![1, 20]\!]$, $P = ?$.

Modélisation 2 : $\Omega = \big\{(x, y) \mid x \in \{4, 6, 8, 12, 20\} \text{ et } y \in [\![1, x]\!]\big\}$ et P une probabilité sur Ω.

On pose $\forall x \in \overbrace{\{4, 6, 8, 12, 20\}}^{X}$, $A_x = \{x\} \times [\![1, x]\!]$. On suppose que

$$\forall x \in X,\ P(A_x) = \frac{1}{5}.$$

On note

$$\forall y \in [\![1, 20]\!],\ B_y = \big\{(x, y) \mid x \in X \text{ et } y \leqslant x\big\}$$

et donc

$$\forall x \in X, \forall y \in [\![1, x]\!],\ P_{A_x}(B_y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } y \leqslant x, \\ 0 & \text{si } y > x. \end{cases}$$

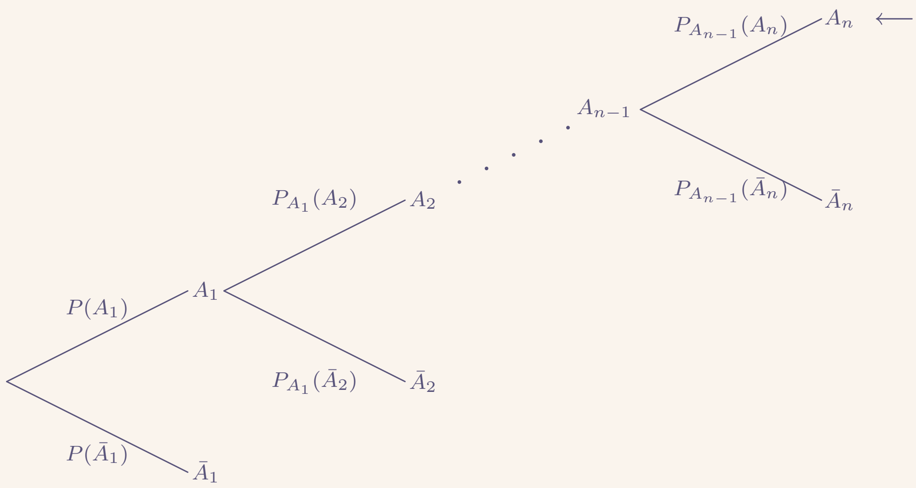
Implémentation en Python de l'experience :

```
import random as rd

def exp():
  faces = rd.choice([4, 6, 8, 12, 20])
  result = rd.randint(1, faces)
  return result == 7

def proba(N = 1000):
  cpt = 0
  for _ in range(N):
    if exp():
      cpt += 1
  return cpt / N
```

Solution :

$$\begin{aligned} P(B_7) &= \sum_{x \in X} P_{A_x}(B_7) P(A_x) \\ &= \frac{1}{5}\left(P_{A_8}(B_7) + P_{A_{12}}(B_7) + P_{A_{20}}(B_7)\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}\right). \end{aligned}$$

Proposition (probabilités composées)**:** Soit (Ω, P) un espace probabilisé, $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des événements tels que
$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0.$$
Alors,
$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1\cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$



Preuve:

$$\forall i, A_1 \cap \cdots \cap A_i \supset A_1 \cap \cdots \cap A_n \text{ donc } P(A_1 \cap \cdots \cap A_i) > 0.$$

$$\begin{aligned}
&P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1\cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)\\
&= P(A_1) \frac{P(A_2\cap A_1)}{P(A_1)} \frac{P(A_3 \cap A_2 \cap A_1)}{P(A_1\cap A_2)} \cdots \frac{P(A_n \cap A_{n-1} \cap \cdots \cap A_1)}{P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})}\\
&= P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)
\end{aligned}$$

□

Exemple:
On reprend l'expérience précédente aléatoire précédente. On sait qu'on a obtenu 7.

Quel dé a été utilisé ?

On veut calculer $P_{B_7}(A_x)$ pour tout x. Soit $x \in X$.

$$\begin{aligned} P_{B_7}(A_x) &= \frac{P(A_x \cap B_7)}{P(B_7)} \\ &= \frac{P_{A_x}(B_7)\, P(A_x)}{P(B_7)} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \{4,6\} \\ \dfrac{\frac{1}{8} \times \frac{1}{5}}{P(B_7)} & \text{si } x = 8 \\ \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}}{P(B_7)} & \text{si } x = 12 \\ \dfrac{\frac{1}{20} \times \frac{1}{5}}{P(B_7)} & \text{si } x = 20 \end{cases} \end{aligned}$$

On a utilisé la formule de Bayes.

Proposition (Bayes)**:** Soit (Ω, P) un espace probabilisé, $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \in \,]0,1[$.

$$P_A(B) = \frac{P_B(A)\ P(B)}{P(A)} = \frac{P_B(A)\ P(B)}{P_B(A)\, P(B) + P_{\bar{B}}(A)\, P\left(\bar{B}\right)}.$$

□

Remarque:
On appèle $P_A(B)$ la vraissemblance (*likelyhood* en anglais), $P(A)$ la probabilité a-priori (*prior distribution*), et $P_B(A)$ la probabilité a-posteriori (*posterior distribution*).

Exemple (filtre bayésien):
On peut utiliser cette formule pour filtrer les SPAMs dans les emails. On utilise des données de la forme :

	mot 1	mot 2	$\cdots$	mot p	spam ?
mail 1					
mail 2					
$\vdots$					
mail n					

On peut donc calculer la probabilité qu'un email soit un SPAM en fonction des mots qu'il contient :

$$\begin{aligned} P_{(\text{mot 1}, \overline{\text{mot 2}}, \ldots)}(\text{spam}) &= \frac{P(\text{spam})\, P_{\text{spam}}(\text{mot 1}, \overline{\text{mot 2}}, \ldots)}{P(\text{mot 1}, \overline{\text{mot 2}}, \ldots)} \\ &\simeq \frac{P_{\text{spam}}(\text{mot 1}) \times P_{\text{spam}}(\overline{\text{mot 2}}) \times \cdots}{P(\text{mot 1}, \overline{\text{mot 2}}, \ldots)}. \end{aligned}$$

Exemple (Test médical):
On estime qu'une personne sur 10 000 est atteinte d'une certaine maladie. On invente un test T.

$$\begin{cases} P_{\text{malade}}(T = \text{positif}) = \dfrac{99}{100}, \\ P_{\overline{\text{malade}}}(T = \text{positif}) = \dfrac{1}{1000}. \end{cases}$$

On fait un test et il revient positif. Quelle est la probabilité d'avoir la maladie : $P_{T+}(M)$?

$$\begin{aligned}
P_{T^+}(M) &= \frac{P_M(T^+)\,P(M)}{P(T)} \\
&= \frac{\frac{99}{100}\times\frac{1}{10\,000}}{\frac{99}{100}\times\frac{1}{10\,000}\times\frac{9\,999}{10\,000}} \\
&= \frac{990}{990+9999} \simeq 9\,\%
\end{aligned}$$

On a 9 % d'avoir la maladie : le test n'est pas très précis.

Exemple (QCM):
On a un QCM de 20 questions où l'on peut répondre par vrai ou faux (donc c'est pas vraiment un QCM). Si un étudiant connaît la réponse, il réponds correctement. Sinon, il choisit l'une des réponses au hasard.

Soit p la probabilité qu'il connaisse la réponse à une question. Cela représente le niveau du candidat : un élève ayant travaillé aura une valeur de p plus importante qu'un élève n'ayant pas travaillé.

L'étudiant obtient $^{13}/_{20}$. Estimer p.

Comme $p \in [0,1]$, on découpe l'intervalle en 10 : on pose

$$\forall k \in [\![0,9]\!]\,,\ A_k : \text{“}p = \frac{k+0,5}{10}\text{”}.$$

On pose aussi

$$\begin{cases}\forall i \in [\![1,20]\!]\,,\ B_i : \text{“la } i\text{-ème réponse est correcte”},\\ \forall j \in [\![0,20]\!]\,,\ C_j : \text{“l'étudiant a } {}^{j}/_{20}\text{”},\end{cases}$$

On cherche donc $P_{C_{13}}(A_k)$. S'il n'y a pas de “pic” de probabilité (en fonction de k), il faut changer le QCM : augmenter le nombre de questions, mettre des questions plus faciles / difficiles. . .

On utilise la formule de Bayes :

$$P_{C_{13}}(A_k) = \frac{P_{A_k}(C_{13})\,P(A_k)}{P(C_{13})}.$$

On peut choisir $P(A_k)$: c'est subjectif. On peut avoir une distribution uniforme, ou suivant une courbe de Gauß, . . .

On choisit $P(A_k) = \dfrac{1}{10}$: distribution uniforme.

$$P(C_{13}) = \sum_{k=0}^{9} P_{A_k}(C_{13})\,P(A_k);$$

$$P_{A_k}(C_{13}) = \binom{20}{13}\left(\frac{p+1}{2}\right)^{13}\left(1-\frac{p+1}{2}\right)^{7}.$$

Proposition (Bayes)**:** Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_k)_{k\in K}$ un système complet d'événements tel que

$$\forall k \in K,\ P(A_k) \neq 0.$$

Soit $X \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(X) \neq 0$. On a

$$\forall k \in K,\ P_X(A_k) = \frac{P_{A_k}(X)\,P(A_k)}{\sum_{j\in K} P_{A_j}(X)P(A_j)}.$$

□

||

Troisième partie

Événements indépendants

Définition: Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, P). On dit que A et B sont <u>indépendants</u> si

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B).$$

Remarque:
L'indépendance d'événements au sens mathématique n'est pas la même chose que l'indépendance dans le sens commun : elle dépend de la probabilité utilisé !

Exemple:
On considère un objet, qui est défectueux avec une probabilité $p \in]0,1[$. On effectue deux contrôles indépendants. Chaque contrôle permet de détecter un défaut (s'il y en a un) avec une probabilité q (il n'y a pas de faux positifs : on ne peut pas trouver un défaut s'il n'y en a pas).

Les deux contrôles sont négatifs. Quelle est la probabilité qu'il y ait quand même un défaut ?

<u>Simulation en Python</u> :

```python
import random as rd

def experience(p, q):
    defaut = bernoulli(p)
    controles = [False, False]

    for i in range(2):
        if defaut:
            controles[i] = bernoulli(q)

    return (controles, defaut)

def proba(p, q, N = 10000):
    cpt = 0
    pr = 0
    while cpt < N:
        c, d = experience(p, q)
        if not any(c): # deux controles negatifs
            cpt += 1

            if d:
                pr += 1
    return pr / N
```

Pour générer une variable aléatoire de probabilité p en Python, on génère un réel $x \in [0,1]$ et on le compare à p :

```python
def bernoulli(p):
        return rd.random() < p
```

<u>Modélisation</u> : $\Omega = \{0,1\}^3$;
$D = \{0,1\}^2 \times \{1\}$ et $P(D) = p$;
$C_1 = \{1\} \times \{0,1\}^2$ et $P_D(C_1) = q$;
$C_2 = \{0,1\} \times \{1\} \times \{0,1\}$ et $P_D(C_2) = q$.

On sait que $P_{\bar{D}}(C_1) = P_{\bar{D}}(C_2) = 0$.

On suppose que C_1 et C_2 indépendants relativement à P_D.

$$P_{\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2}(D) = \frac{P_D\left(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2\right) P(D)}{P\left(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2\right)}.$$

On a :

$$\begin{aligned} P_D\left(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2\right) &= P_D\left(\bar{C}_1\right) P_D\left(\bar{C}_2\right) \\ &= (1-q)^2, \end{aligned}$$

$$P(D) = p,$$

et

$$\begin{aligned} P\left(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2\right) &= P_D(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2)\, P(D) + P_{\bar{D}}(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2)\, P(\bar{D}). \\ &= p(1-q)^2 + 1 - p. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} P\left(\bar{C}_1\right)\, P\left(\bar{C}_2\right) &= \big((1-q)p + 1 - p\big)^2 \\ &\neq P\big(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2\big) \text{ en général.} \end{aligned}$$

Finalement,

$$P_{\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2}(D) = \frac{p(1-q)^2}{p(1-q)^2 + 1 - p}.$$

Si $q = 1$, on a $P_{\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2}(D) = 0$. Si $q = 0$, on a $P_{\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2}(D) = p$.

Définition: Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'événements.

1. On dit que ces événements sont 2 à 2 indépendants si

$$\forall i \neq j, \quad P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\, P(A_j)$$

2. On dit qu'ils sont mutuellement indépendants si

$$\forall J \in \mathscr{P}(I) \setminus \{\varnothing\}, \quad P\Big(\bigcap_{j \in J} A_j\Big) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

Exemple:

À faire

$\Omega = \ldots$, $P = \ldots$, $A, B, C = \ldots$ tels que

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A)\, P(B) \\ P(A \cap C) = P(A)\, P(C) \\ P(B \cap C) = P(B)\, P(C) \end{cases}$$

mais

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A)\, P(B)\, P(C).$$

Exercice:

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, A et B deux événements indépendants (par rapport à P).

1. *Montrer que A et $\bar{B}$ sont indépendants.*
2. *Montrer que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.*

Solution :

1. On suppose $P(A) \neq 0$.

$$\begin{aligned} P\left(A \cap \bar{B}\right) &= P_A\left(\bar{B}\right) P(A) \\ &= P(A)\left(1 - P_A(B)\right) \\ &= P(A)\big(1 - P(B)\big) \\ &= P(A)\, P\left(\bar{B}\right) \end{aligned}$$

On suppose $P(A) = 0$. $A \cap \bar{B} \subset A$ donc

$$0 \leqslant P\left(A \cap \bar{B}\right) \leqslant P(A) = 0$$

et donc

$$P\left(A \cap \bar{B}\right) = 0 = P(A)\, P\left(\bar{B}\right).$$

2. C'est une conséquence du 1. : on remplace B par A et A par $\bar{B}$.

Proposition: Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements mutuellement indépendants. Soit $J \in \mathscr{P}(I)$ et on pose

$$\forall i \in I,\ B_i = \begin{cases} \bar{A}_i & \text{si } i \in J \\ A_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, $(B_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Preuve:
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathscr{P}(n) :\ \text{“}\forall K \subset I \text{ avec } \#K = n,\ P\left(\bigcap_{i\in K} B_i\right) = \prod_{i\in K} P(B_i)\text{”}.$$

$\square$

Quatrième partie

Bilan

Une probabilité est une application de la forme
$$P : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$
vérifiant

1. $P(\Omega) = 1$;
2. $\forall A, B,\ P(A \dot\cup B) = P(A) + P(B)$.

Équiprobabilité

$$\begin{aligned} P : \mathscr{P}(\Omega) &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto \frac{\#A}{\#\Omega}. \end{aligned}$$

Si $A \cap B = \varnothing$, on dit qu'il sont incompatibles.

Si on associe à chaque événement élémentaire ω_i une "valeur" ($\simeq$ probabilité) p_i, alors il existe une unique probabilité P sur Ω vérifiant $P(\omega_i) = p_i$.

$$P\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

$$\forall A, B, P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilité conditionnelle

Pour tout événement A de Ω de probabilité non nulle,
$$\begin{aligned} P_A : \mathscr{P}(\Omega) &\longrightarrow [0,1] \\ X &\longmapsto \frac{P(A \cap X)}{P(A)}. \end{aligned}$$

Un système complet d'événements est une partition de Ω.

Probabilités totales

$$\forall X \in \mathscr{P}(\Omega), P(X) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P_{A_i}(X).$$

A et B sont deux événements indépendants si
$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B).$$

$(A_i)_{i \in I}$ est une famille finie d'événements mutuellement indépendants si
$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Probabilités composées

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Bayes

$$P_A(B) = \frac{P_B(A)\, P(B)}{P(A)}.$$

Pour plusieurs événements

$$\forall k \in K,\ P_X(A_k) = \frac{P_{A_k}(X)\, P(A_k)}{\sum_{j \in K} P_{A_j}(X)\, P(A_j)}.$$