

CHAPITRE 28

Sous-e
d'un e

TABLE DES MATIÈRES

I	Espace affine (HORS PROGRAMME)	2
II	Sous-espaces affines	5
III	Parallélisme et hyperplans	7
IV	Repère affine	9

Première partie

Espace affine (HORS PROGRAMME)

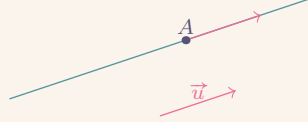
MOTIVATION GÉOMÉTRIQUE :

Dans les petites classes, la géométrie du plan distingue deux types d'objets élémentaires :

- le point
- le vecteur

reliés par la notion de translation.

Par exemple, une droite peut être décrite avec un point et un vecteur :



Soit $\mathbb{K}$ un corps.

Définition: Un $\mathbb{K}$ -espace affine est un triplet $(E, \vec{E}, \tau)$ où

- E est un ensemble ;
- $\vec{E}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ;
- $\tau : E \times \vec{E} \rightarrow E$ telle que

$$\begin{cases} \forall M \in E, \tau(M, \vec{0}) = M, \\ \forall M \in E, \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2, \tau(\tau(M, \vec{u}), \vec{v}) = \tau(M, \vec{u} + \vec{v}), \\ \forall (A, B) \in E^2, \exists! \vec{u} \in \vec{E}, \tau(A, \vec{u}) = B. \end{cases}$$

Les éléments de E sont appelés points, ceux de $\vec{E}$ vecteurs.

Pour tout $\vec{u} \in \vec{E}$, l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \tau(M, \vec{u}) \end{array}$$

est la translation de vecteur $\vec{u}$.

En général, pour $M \in E$ et $\vec{u} \in \vec{E}$, au lieu d'écrire $\tau(M, \vec{u})$, on écrit $M + \vec{u}$. Soient $(A, B) \in E^2$. L'unique vecteur $\vec{u}$ tel que $A + \vec{u} = B$ est noté $\overrightarrow{AB} = B - A$.

Proposition: Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Alors $(E, E, +)$ est un $\mathbb{K}$ -espace affine. $\square$

Proposition: Soit $(E, \vec{E}, \tau)$ un $\mathbb{K}$ -espace affine. Si $E \neq \emptyset$,

$$\vec{E} = \left\{ \overrightarrow{AB} \mid (A, B) \in E^2 \right\}.$$

■

REMARQUE:

On a même démontré que, pour tout $A \in E$, l'application

$$\begin{aligned}\varphi_A : \vec{E} &\longrightarrow E \\ \vec{u} &\longmapsto A + \vec{u}\end{aligned}$$

est bijective. On dit qu'on a vectorialisé E au point A :

$$\begin{cases} M + N := A + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \\ \lambda N := A + \lambda \overrightarrow{AM} \end{cases}$$

Proposition: Soit $(E, \vec{E}, \tau)$ un $\mathbb{K}$ -espace affine.

1. $\forall A \in E, \overrightarrow{AA} = \vec{0}$;
2. $\forall A, B, C \in E, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;
3. $\forall A, B \in E, \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

■

Deuxième partie

Sous-espaces affines

Définition: Soit $(E, \vec{E}, \tau)$ un $\mathbb{K}$ -espace affine et $F \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$.

Pour tout $A \in F$, on pose $\vec{F}_A = \{\vec{AB} \mid B \in F\}$. On dit que F est un sous-espace affine de $(E, \vec{E}, \tau)$ s'il existe $A \in F$ tel que $\vec{F}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.

Proposition: Avec les notations précédentes, $(F, \vec{F}_A, \tau|_{F \times \vec{F}_A})$ est un espace affine. ■

Proposition: Soit F un sous-espace affine de $(E, \vec{E}, \tau)$. Alors

$$\forall (A, B) \in F^2, \vec{F}_A = \vec{F}_B.$$

Corollaire: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $y \in F$.

Les solutions de l'équation $f(x) = y$ est un sous-espace affine de direction $\text{Ker } f$. □

Proposition: Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces affines de F . Alors, $\bigcap_{i \in I} F_i$ est soit vide, soit un sous-espace affine de F .

De même que pour les groupes et les espaces vectoriels, on peut définir le sous-espace engendré par une partie de E .

Proposition – Définition: Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Le sous-espace affine engendré par A est

$$\bigcap_{\substack{F \text{ sous-espace affine de } E \\ A \subset F}} F.$$

C'est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace affine contenant A .

REMARQUE:

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F un sous-espace affine de E , alors

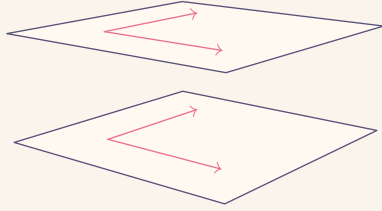
$$\begin{cases} \forall A \in F, F = A + \vec{F} = \{A + \vec{u} \mid \vec{u} \in \vec{F}\}, \\ \vec{F} \text{ sous-espace vectoriel de } E. \end{cases}$$

Troisième partie

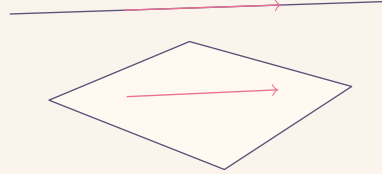
Parallélisme et hyperplans

Définition: Soit $(E, \vec{E}, \tau)$ un espace affine, F et G deux sous-espaces affines de E .

1. On dit que F et G sont fortement parallèles si $\vec{F} = \vec{G}$.
2. On dit que F et G sont faiblement parallèles si $\vec{F} \subset \vec{G}$ ou $\vec{G} \subset \vec{F}$.



(a) parallélisme fort



(b) parallélisme faible

Définition: Soit F un sous-espace affine de $(E, \vec{E}, \tau)$. L'espace

$$\vec{F} = \{ \overrightarrow{AB} \mid A, B \in F \}$$

est appelé direction de F .

On dit que

- F est une droite affine si $\vec{F}$ est une droite vectorielle,
- F est une plan affine si $\vec{F}$ est un plan vectorielle,
- F est une hyperplan affine si $\vec{F}$ est un hyperplan vectorielle.

Quatrième partie

Repère affine

Définition: Soit F un sous-espace affine de E . Un repère de F est la donnée d'un point $A \in F$ ("l'origine du repère") et d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ de $\vec{F}$ ("vecteurs direction").

Proposition – Définition: Soit F un sous-espace affine de E , et $\mathcal{R} = (A, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ un repère de F . Alors, pour tout $B \in F$,

$$\exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad B = A + \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i.$$

On dit que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont les coordonnées de B .

REMARQUE:

Les solutions d'un problème linéaire forment un espace sous-affine de direction les solutions du système homogène associé.