Chapitre 28

TD

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

Table des matières

Exercice 1

$$F = A + V$$

où $A = (0, 1, 0)$ et $V = \mathrm{Vect}\big((0, 1, -1)\big)$ donc F est une droite affine.

Exercice 2

On a $\overrightarrow{OM} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{OM}\right) = \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{O'M} = \alpha'\vec{u} + \beta'\vec{v}$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\left(\overrightarrow{O'M}\right) = \begin{pmatrix}\alpha' \\ \beta'\end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\left(\overrightarrow{O'O}\right) = -\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\left(\overrightarrow{OO'}\right)$.

$\overrightarrow{OO'} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{OO'}\right) = \begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix}$.

On a $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} = \begin{pmatrix}x & x' \\ y & y'\end{pmatrix}$ et donc $P^{-1} = \dfrac{1}{xy' - yx'}\begin{pmatrix}y' & -x' \\ -y & x\end{pmatrix}$.

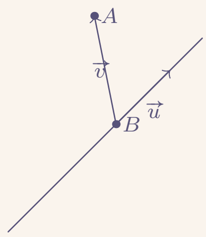
Or,

$$\forall \vec{w} \in \vec{E},\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\vec{w}) = P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{w})\,.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\alpha' \\ \beta'\end{pmatrix} &= -P^{-1}\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix} + P^{-1}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix} \\ &= P^{-1}\begin{pmatrix}\alpha - a \\ \beta - b\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{xy' - yx'}\begin{pmatrix}y'(\alpha - x) - x'(\beta - b) \\ -y(\alpha - a) + x(\beta - b)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exercice 3



$$\left.\begin{aligned} x-3y+2z&=1\\ 2x+y-3z&=-1\end{aligned}\right\} \iff \begin{cases} x-3y+2z=1\\ 7y-7z=-3\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y=-\dfrac{3}{7}+z\\ x=-\dfrac{2}{7}+z\end{cases}$$
$$\iff (x,y,z)=\left(-\frac{2}{7}+z,-\frac{3}{7}+z,z\right)$$
$$=\left(-\frac{2}{7},-\frac{3}{7},0\right)+z(1,1,1)$$

On pose B le point de coordonnées $\left(-\frac{2}{7},-\frac{3}{7},0\right)$ et $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(1,1,1)$. On a $B\in D$. On pose $\vec{D}=\mathrm{Vect}\,(\vec{u})$.

On pose $\vec{v}=\overrightarrow{BA}$: ses coordonnées sont $\left(1+\frac{2}{7},-1+\frac{3}{7},1-0\right)=\left(\frac{9}{7},-\frac{4}{7},1\right)$.

Soit M de coordonnées (x,y,z).

$$\begin{aligned} M\in P &\iff \overrightarrow{AM}\in \mathrm{Vect}\,(\vec{u}+\vec{v})\\ &\iff \text{ la famille } \left(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v}\right) \text{ est liée}\\ &\iff \det\nolimits_{\mathscr{B}}\left(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v}\right)=0\\ &\iff \begin{vmatrix} x-1 & 1 & \frac{9}{7}\\ y+1 & 1 & -\frac{4}{7}\\ z-1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\\ &\iff \frac{11}{7}(x-1)+\frac{2}{7}(y+1)-\frac{13}{7}(z-1)=0\\ &\iff 11x+2y-13z+4=0\end{aligned}$$

Exercice 4

1.

$$D \text{ et } D' \text{ sont complanaires} \iff \begin{cases} D \cap D' \neq \varnothing \\ \text{ou} \\ \vec{D} = \vec{D'}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D \cap D' \neq \varnothing &\iff \begin{cases} \boxed{x} - 2z = 1 \\ y - z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = a \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \boxed{x} - 2z = 1 \\ \boxed{y} - z = 2 \\ y + 3z = 0 \\ -2y + 4z = a - 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \\ z = -\dfrac{1}{2} \\ 0 = a + 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $a = -4$, D et D' sont sécantes donc coplanaires.
On suppose maintenant $a \neq -4$. On a

$$\vec{D} : \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

et donc $\vec{D} = \text{Vect}\left(\underbrace{(2,1,1)}_{\vec{u}}\right)$.

On a

$$\vec{D'} : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \quad .$$

Or, $\vec{u} \notin \vec{D'}$ et donc $\vec{D} \neq \vec{D'}$. Les droites ne sont jamais parallèles.

2. On suppose $a = -4$. On pose A le point de coordonnées de $\left(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. On a $A \in D \cap D'$. On pose $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(2,1,1)$ et $\vec{v}$ le vecteur de coordonnées $(-4,1,3)$.
Soit M un point de coordonnées (x,y,z).

$$\begin{aligned} M \in P &\iff \overrightarrow{AM} \in \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) \\ &\iff \begin{vmatrix} x & 2 & -4 \\ y - \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ z + \frac{1}{2} & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff 2x - 10\left(y - \frac{3}{2}\right) + 6\left(z + \frac{1}{2}\right) = 0 \\ &\iff 2x - 10y + 6z + 18 = 0. \end{aligned}$$

Exercice 5

On a

$$P: \quad ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } a, b, c, d \neq 0.$$

$$\forall i, \quad ax_i + by_i + cz_i + d = 0 \iff \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$