

CHAPITRE 28

Sous-e
d'un e

TABLE DES MATIÈRES

I	Espace affine (HORS PROGRAMME)	2
II	Sous-espaces affines	7
III	Parallélisme et hyperplans	10
IV	Repère affine	12

Première partie

Espace affine (HORS PROGRAMME)

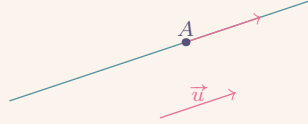
MOTIVATION GÉOMÉTRIQUE :

Dans les petites classes, la géométrie du plan distingue deux types d'objets élémentaires :

- le point
- le vecteur

reliés par la notion de translation.

Par exemple, une droite peut être décrite avec un point et un vecteur :



Soit $\mathbb{K}$ un corps.

Définition: Un $\mathbb{K}$ -espace affine est un triplet $(E, \vec{E}, \tau)$ où

- E est un ensemble ;
- $\vec{E}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ;
- $\tau : E \times \vec{E} \rightarrow E$ telle que

$$\begin{cases} \forall M \in E, \tau(M, \vec{0}) = M, \\ \forall M \in E, \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2, \tau(\tau(M, \vec{u}), \vec{v}) = \tau(M, \vec{u} + \vec{v}), \\ \forall (A, B) \in E^2, \exists! \vec{u} \in \vec{E}, \tau(A, \vec{u}) = B. \end{cases}$$

Les éléments de E sont appelés points, ceux de $\vec{E}$ vecteurs.

Pour tout $\vec{u} \in \vec{E}$, l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \tau(M, \vec{u}) \end{array}$$

est la translation de vecteur $\vec{u}$.

En général, pour $M \in E$ et $\vec{u} \in \vec{E}$, au lieu d'écrire $\tau(M + \vec{u})$, on écrit $M + \vec{u}$. Soient $(A, B) \in E^2$. L'unique vecteur $\vec{u}$ tel que $A + \vec{u} = B$ est noté $\vec{AB} = B - A$.

EXEMPLE: 1. On pose

$$(\mathcal{E}) : y' = xy + xe^x$$

Soit E l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$, $\vec{E}$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des solutions de

$$(\mathcal{H}) : y' = xy,$$

et

$$\begin{array}{ccc} \tau : E \times \vec{E} & \longrightarrow & E \\ (f, \vec{u}) & \longmapsto & f + \vec{u} \end{array}$$

où $+$ correspond à l'addition de fonctions.

- $\forall f \in E, \tau(f, \vec{0}) = f + 0 = f$.

$$\begin{aligned} \forall f \in E, \forall (h_1, h_2) \in \vec{E}^2, \tau(\tau(f, h_1), h_2) &= \tau(f + h_1, h_2) \\ &= (f + h_1) + h_2 \\ &= f + (h_1 + h_2) \\ &= \tau(f, \tau(h_1, h_2)) \end{aligned}$$

— Soient $(f_1, f_2) \in E^2$. On pose $h = f_2 - f_1 \in \vec{E}$ ($-$ est la soustraction de fonctions) et alors $\tau(f_1, h) = f_2$ et h est unique.

2. On pose $E = \mathbb{R}^2$, $\vec{E} = \mathbb{R}^2$ et

$$\begin{aligned} \tau : E \times \vec{E} &\longrightarrow E \\ ((x, y), (u, v)) &\longmapsto (x + u, y + v). \end{aligned}$$

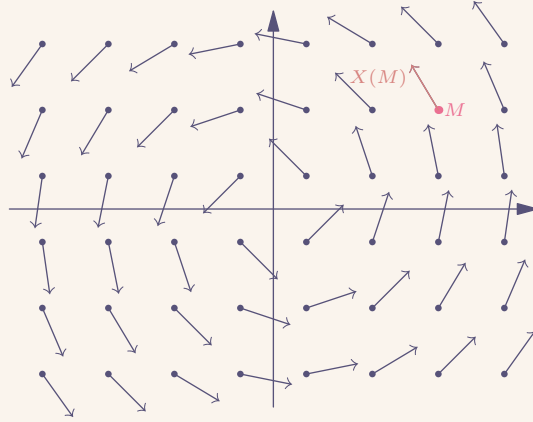
$(E, \vec{E}, \tau)$ est un $\mathbb{R}$ -espace affine.

Proposition: Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Alors $(E, E, +)$ est un $\mathbb{K}$ -espace affine. $\square$

EXEMPLE:

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Un champ de vecteur est une application

$$\begin{array}{ccc} X : E & \longrightarrow & E. \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{points} & & \text{vecteurs} \end{array}$$



EXEMPLE:

Avec $F = \mathbb{R}^2$ et $E = \{(x, y) \in F \mid 2x + 3y = 5\}$, $(E, +, \cdot)$ n'est pas un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel : $(0, 0) \notin E$.

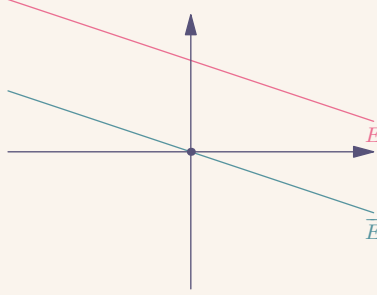
On pose $\vec{E} = \{(x, y) \in F \mid 2x + 3y = 0\}$, c'est un sous-espace vectoriel de F . On pose

$$\begin{aligned} \tau : E \times \vec{E} &\longrightarrow E \\ ((x, y), (u, v)) &\longmapsto (x + u, y + v). \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E, \forall (u, v) \in \vec{E}, 2(x + u) + 3(y + v) &= 2x + 3y + 2u + 3v \\ &= 5 + 0 = 5 \end{aligned}$$

donc $\tau((x, y), (u, v)) \in E$.



EXEMPLE:

Avec E les solutions de $y' = 3y + e^x$, $\vec{E} = \mathbb{R}$, et

$$\begin{aligned} \tau : E \times \vec{E} &\longrightarrow E \\ (y, \lambda) &\longmapsto (x \mapsto y(x) + \lambda e^{3x}). \end{aligned}$$

Proposition: Soit $(E, \vec{E}, \tau)$ un $\mathbb{K}$ -espace affine. Si $E \neq \emptyset$,

$$\vec{E} = \left\{ \overrightarrow{AB} \mid (A, B) \in \vec{E} \right\}.$$

Preuve: — $\forall A, B \in E, \overrightarrow{AB} \in \vec{E}$.
 — Soit $\vec{u} \in \vec{E}$. Comme $E \neq \emptyset$, on choisit $A \in E$. On pose $B = A + \vec{u}$. D'où $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

□

REMARQUE:

On a même démontré que, pour tout $A \in E$, l'application

$$\begin{aligned} \varphi_A : \vec{E} &\longrightarrow E \\ \vec{u} &\longmapsto A + \vec{u} \end{aligned}$$

est bijective. On dit qu'on a vectorialisé E au point A :

$$\begin{cases} M + N := A + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \\ \lambda N := A + \lambda \overrightarrow{AM} \end{cases}$$

Proposition: Soit $(E, \vec{E}, \tau)$ un $\mathbb{K}$ -espace affine.

1. $\forall A \in E, \overrightarrow{AA} = \vec{0}$;
2. $\forall A, B, C \in E, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;
3. $\forall A, B \in E, \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Preuve: 1. Soit $A \in E$. $\tau(A, \overrightarrow{AA}) = A = \tau(A, \vec{0})$ donc $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

2. Soient $A, B, C \in E$. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.

$$\tau(\tau(A, \vec{u}), \vec{v}) = \tau(B, \vec{v}) = C = \tau(A, \overrightarrow{AC})$$

$$\parallel$$

$$\tau(A, \vec{u} + \vec{v})$$

3. Soient $A, B \in E$. D'après 1. $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ et, d'après 2. $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$. Donc $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

□

Deuxième partie

Sous-espaces affines

Définition: Soit $(E, \vec{E}, \tau)$ un K -espace affine et $F \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$.

Pour tout $A \in F$, on pose $\overrightarrow{F_A} = \{\overrightarrow{AB} \mid B \in F\}$. On dit que F est un sous-espace affine de $(E, \vec{E}, \tau)$ s'il existe $A \in F$ tel que $\overrightarrow{F_A}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.

Proposition: Avec les notations précédentes, $(F, \overrightarrow{F_A}, \tau|_{F \times \overrightarrow{F_A}})$ est un espace affine.

Preuve: — Soit $M \in F$, $\vec{u} \in \overrightarrow{F_A}$.

$$M + \vec{u} = A + \underbrace{\overrightarrow{AM}}_{\in \overrightarrow{F_A}} + \underbrace{\vec{u}}_{\in \overrightarrow{F_A}} = A + \underbrace{\overrightarrow{AB}}_{B \in F} = B \in F.$$

— Soit $M \in F$, $\vec{u}, \vec{v} \in \overrightarrow{F_A}$.

$$(M + \vec{u}) + \vec{v} = M + (\vec{u} + \vec{v})$$

car $M \in E$ et $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$.

— Soient $M, N \in F \subset E$. On sait que

$$\exists! \vec{u} \in \vec{E}, M + \vec{u} = N.$$

$$\begin{aligned} \vec{u} = \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} \\ &= \underbrace{\overrightarrow{AN}}_{\in \overrightarrow{F_A}} - \underbrace{\overrightarrow{AM}}_{\in \overrightarrow{F_A}} \in \overrightarrow{F_A} \end{aligned}$$

□

Proposition: Soit F un sous-espace affine de $(E, \vec{E}, \tau)$. Alors

$$\forall (A, B) \in F^2, \overrightarrow{F_A} = \overrightarrow{F_B}.$$

Preuve:

Soit A comme dans la définition ($\overrightarrow{F_A}$ sous-espace vectoriel de $\vec{E}$) et $B \in F$. Soit $\vec{u} \in \overrightarrow{F_B}$. Alors $\vec{u} = \overrightarrow{BM}$ avec $M \in F$.

$$\vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{F_A}.$$

Soit $\vec{v} \in \overrightarrow{F_A}$. On pose $M = \underbrace{\vec{M}}_{\in \overrightarrow{F_A}} + \underbrace{\vec{v}}_{\in \overrightarrow{F_A}} \in F$. Donc $\vec{v} = \overrightarrow{BM} \in \overrightarrow{F_B}$.

□

Corollaire: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $y \in F$.

Les solutions de l'équation $f(x) = y$ est un sous-espace affine de direction $\text{Ker } f$. $\square$

Proposition: Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces affines de F . Alors, $\bigcap_{i \in I} F_i$ est soit vide, soit un sous-espace affine de F .

De même que pour les groupes et les espaces vectoriels, on peut définir le sous-espace engendré par une partie de E .

Proposition – Définition: Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Le sous-espace affine engendré par A est

$$\bigcap_{\substack{F \text{ sous-espace affine de } E \\ A \subset F}} F.$$

C'est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace affine contenant A .

REMARQUE:

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F un sous-espace affine de E , alors

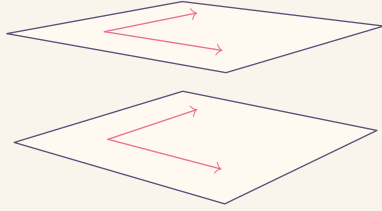
$$\begin{cases} \forall A \in F, F = A + \vec{F} = \{A + \vec{u} \mid \vec{u} \in \vec{F}\}, \\ \vec{F} \text{ sous-espace vectoriel de } E. \end{cases}$$

Troisième partie

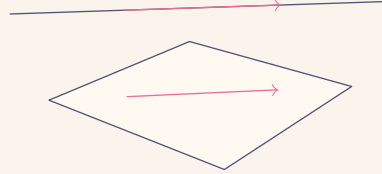
Parallélisme et hyperplans

Définition: Soit $(E, \vec{E}, \tau)$ un espace affine, F et G deux sous-espaces affines de E .

1. On dit que F et G sont fortement parallèles si $\vec{F} = \vec{G}$.
2. On dit que F et G sont faiblement parallèles si $\vec{F} \subset \vec{G}$ ou $\vec{G} \subset \vec{F}$.



(a) parallélisme fort



(b) parallélisme faible

Définition: Soit F un sous-espace affine de $(E, \vec{E}, \tau)$. L'espace

$$\vec{F} = \{ \overrightarrow{AB} \mid A, B \in F \}$$

est appelé direction de F .

On dit que

- F est une droite affine si $\vec{F}$ est une droite vectorielle,
- F est une plan affine si $\vec{F}$ est un plan vectorielle,
- F est une hyperplan affine si $\vec{F}$ est un hyperplan vectorielle.

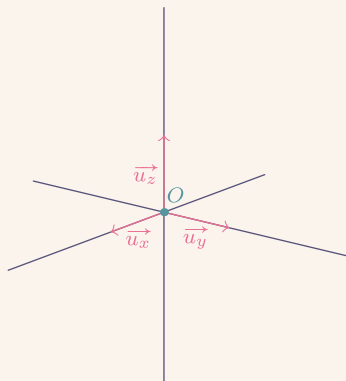
Quatrième partie

Repère affine

Définition: Soit F un sous-espace affine de E . Un repère de F est la donnée d'un point $A \in F$ ("l'origine du repère") et d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ de $\vec{F}$ ("vecteurs direction").

EXEMPLE (mécanique – physique):

On pose $E = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, +)$, un $\mathbb{R}$ -espace affine. $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est une base de E : la base cartésienne. Il existe plusieurs bases de E : $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ (base cylindrique) et $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ (base sphérique) sont deux autres bases de E .



Proposition – Définition: Soit F un sous-espace affine de E , et $\mathcal{R} = (A, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ un repère de F . Alors, pour tout $B \in F$,

$$\exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad B = A + \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i.$$

On dit que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont les coordonnées de B .

REMARQUE:

Les solutions d'un problème linéaire forment un espace sous-affine de direction les solutions du système homogène associé.