Chapitre 29

Produit scalaire

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 15 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On sait déjà calculer le produit scalaire en dimension 2 et 3 mais l'objectif de ce chapitre est de le généraliser en dimension potentiellement infinie.

Première partie

Définitions

Définition: Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive :

$$f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

1. $\forall (u_1, u_2, v) \in E^3, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, f(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha f(u_1, v) + \beta f(u_2, v)$, (bilinéaire)
2. $\forall (u, v) \in E^2,\ f(u, v) = f(v, u)$, (symétrie)
3. $\forall u \in E,\ f(u, u) \geqslant 0$, (positive)
4. $\forall u \in E,\ \big(f(u, u) = 0 \iff u = 0_E\big)$. (définie)

On dit alors que (E, f) est un espace préhilbertien. Si, de plus, E est de dimension finie, alors on dit que (E, f) est un espace euclidien.

En général, on note $\langle u \mid v\rangle$, $\langle u, v\rangle$ ou $(u \mid v)$ à la place de $f(u, v)$.

Remarque:
Même si elle est utilisée (notament au lycée), la notation $u \cdot v$ est dangeureuse car elle peut être facilement confondue par la multiplication.

Définition: Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un esapce préhilbertien. Soit $x \in E$.

La norme (euclidienne) de x est

$$\sqrt{\langle x \mid x\rangle} = \|x\|.$$

Proposition:
1. $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \iff x = 0_E$ (séparation)
2. $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ (homogénéité positive)
3. $\forall (x, y) \in E^2,\ \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

$\square$

L'inégalité triangulaire sera prouvée dans la suite du chapitre (paragraphe 2.).

Définition: Soit $(x, y) \in E^2$. On dit que x et y sont orthogonaux si $\langle x \mid y\rangle = 0$. On note cette situation $x \perp y$.

Deuxième partie

Quelques formules

Dans ce paragraphe, $\big(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle\big)$ est un espace préhilbertien.

Proposition: Soient $x, y \in E$.

1. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x \mid y\rangle$.
2. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$. (identité du parallélogramme)
3. $\langle x \mid y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$. (polarisation)

■

Théorème (inégalité de Cauchy–Schwarz)**:** Soient $x, y \in E$. Alors

$$\big|\langle x \mid y\rangle\big| \leqslant \|x\|\,\|y\|$$

et

$$\big|\langle x \mid y\rangle\big| = \|x\|\,\|y\| \iff x \text{ et } y \text{ sont colinéaires.}$$

■

Corollaire (inégalité triangulaire)**:** Soit $(x, y) \in E^2$.

1. $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
2. $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, \big(x = \lambda y \text{ ou } y = \lambda x\big)$.

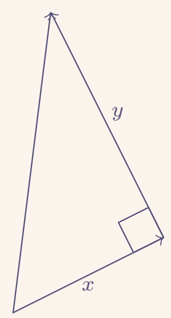
■

Troisième partie

Familles orthogonales

Théorème (Pythagore)**:** Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff x \perp y.$$



■

Définition: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs. On dit que cette famille est orthogonale si

$$\forall i \neq j\, e_i \perp e_j.$$

Si, en plus, on a

$$\forall i \in I,\ \|e_i\| = 1,$$

alors on dit que la famille est orthonormale ou orthonormée.

Proposition (Pythagore)**:** Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille orthogonale. Alors

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2.$$

Théorème: Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

■

Algorithme (Orthonormalisation de Gran–Schmidt)**:** On suppose E de dimension finie. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

— *Étape 1* : On pose $v_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$ de sorte que $\|v_1\| = 1$.

— *Étape 2* : On pose

$$u_2 = e_2 - \langle e_2 \mid v_1 \rangle\, v_1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\langle u_2 \mid v_1 \rangle &= \big\langle e_2 - \langle e_2 \mid v_1 \rangle\, v_1 \mid v_1 \big\rangle \\ &= \langle e_2 \mid v_1 \rangle - \langle e_2 \mid v_1 \rangle \langle v_1 \mid v_1 \rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

On pose $v_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|}$ donc $v_2 \perp v_1$ et $\|v_2\| = 1$.

— *Étape 3* : On pose

$$u_2 = e_3 - \langle e_3 \mid v_1 \rangle v_1 - \langle e_3 \mid v_2 \rangle v_2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\langle u_3 \mid v_1 \rangle &= \langle e_3 \mid v_1 \rangle - \langle e_3 \mid v_1 \rangle \underbrace{\langle v_1 \mid v_1 \rangle}_{=1} - \langle e_3 \mid v_2 \rangle \underbrace{\langle v_2 \mid v_1 \rangle}_{=0} \\ &= 0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\langle u_3 \mid v_2 \rangle &= \langle e_3 \mid v_2 \rangle - \langle e_3 \mid v_1 \rangle \underbrace{\langle v_1 \mid v_2 \rangle}_{=0} - \langle e_3 \mid v_2 \rangle \underbrace{\langle v_2 \mid v_2 \rangle}_{=1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

On pose $v_3 = \dfrac{u_3}{\|u_3\|}$ de sorte que $v_3 \perp v_1$, $v_3 \perp v_2$ et $\|v_3\| = 1$.

— *Étape $i+1$* : On pose

$$u_{i+1} = e_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} \langle e_{i+1} \mid v_k \rangle v_k.$$

Ainsi, pour tout $j \in [\![1, i]\!]$, on a

$$\begin{aligned}\langle u_{i+1} \mid v_j \rangle &= \langle e_{i+1} \mid v_j \rangle - \sum_{k=1}^{i} \langle e_{i+1} \mid v_k \rangle \langle v_k \mid v_j \rangle \\ &= \langle e_{i+1} \mid v_j \rangle - \langle e_{i+1} \mid v_j \rangle \|v_j\|^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

On pose $v_{i+1} = \dfrac{u_{i+1}}{\|u_{i+1}\|}$.

Proposition: Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{C}$ la base obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt. Alors,

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i) = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_i).$$

□

Corollaire (théorème de la base orthonormée incomplète)**:** Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base orthonormée d'un espace euclidien. On peut trouver $e_{k+1}, \ldots, e_n$ tels que $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ soit une base orthonormée de E.

■

Théorème: Soit E un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $(x, y) \in E^2$. On pose $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i.$$

Alors

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors,

$$\langle x \mid y \rangle = X^\top Y.$$

■

Proposition: Soit E un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Alors,

$$\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle\, e_i.$$

■

Quatrième partie

Projection orthogonale

Dans ce paragraphe, $\big(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle\big)$ est un espace préhilbertien (de dimension quelconque).

Définition: Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. L'orthogonal de A est

$$A^\perp = \{u \in E \mid \forall a \in A,\, a \perp u\}.$$

Proposition:

$$\forall A \in \mathscr{P}(E),\ A^\perp \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.$$

■

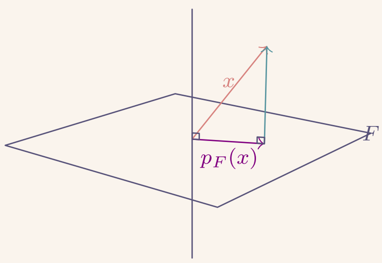
Théorème: Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors

$$F \oplus F^\perp = E.$$

■

Définition: Dans le conditions précédentes, $F^\perp$ est appelé le supplémentaire orthogonal de F.

La projection sur F parallèlement à $F^\perp$ est appelé projection orthogonale sur F. On la note p_F.



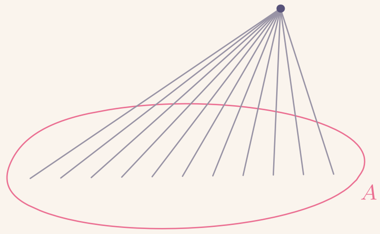
Proposition (inégalité de Bessel)**:** Soit F de dimension finie. Alors,

$$\forall x \in E,\ \|p_F(x)\| \leqslant \|x\|.$$

■

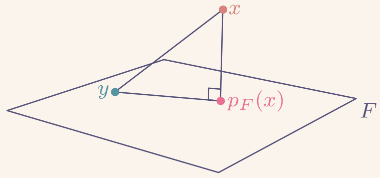
Définition: Soit $A \in \mathscr{P}(E)$ non vide et $x \in E$. La distance de x à A est

$$d(x, A) = \inf\big(\{\|x - a\| \mid a \in A\}\big).$$



Théorème: Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $x \in E$. Alors,

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|.$$



■

Proposition: Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F. Alors,

$$\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle\, e_i.$$

■

Proposition: Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors,

$$\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F.$$

■

Cinquième partie

Annexe

Dans ce chapitre, beaucoup des résultats ne seront pas prouvés, et sont, en grande majorité, hors-programme (pour l'année de *MP2I*).

V.1 Produit vectoriel

Théorème (Riesz): Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace euclidien. L'application

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow E^* \\ a &\longmapsto \langle a \mid \cdot \rangle \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

■

Ici, $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique.

Définition: Soient u et v linéairement indépendants dans E. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.

L'application

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto \det_{\mathscr{B}}(u, v, w) \end{aligned}$$

est linéaire. D'après le théorème de Riesz,

$$\exists!\, a \in E,\ f = \langle a \mid \cdot \rangle\,.$$

On considère un tel vecteur $a \in E$. Donc,

$$\forall w \in E,\ \det_{\mathscr{B}}(u, v, w) = \langle a \mid w \rangle\,.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} (u, v, w) \text{ base de } E &\iff \langle a \mid w \rangle \neq 0 \\ &\iff w \not\perp a. \end{aligned}$$

Comme $a \not\perp a$, (u, v, a) est une base de E. a est le produit vectoriel de u et v et est noté $u \wedge v$.

$$\forall w \in E,\ \det_{\mathscr{B}}(u, v, w) = \underbrace{\langle u \wedge v \mid w \rangle}_{\substack{\text{produit mixte} \\ \text{noté } [u,v,w]}}\,.$$

Proposition: Soit $(u, v) \in E^2$ avec u et v linéairement indépendants.

1. $(u \wedge v) \perp u$;
2. $(u \wedge v) \perp v$;
3. $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe (i.e. $\det(u, v, u \wedge v) > 0$) ;
4. $\|u \wedge v\| = \|u\|\,\|v\|\, \sin(\widehat{u, v})$.

■

Proposition: Soient $u = (a, b, c)$ et $v = (\alpha, \beta, \gamma)$. Alors,

$$u \wedge v = (b\gamma - c\beta, \alpha c - \gamma a, a\beta - b\alpha).$$

■

V.2 Calcul différentiel

Définition: Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ où D est un ouvert. Soit $a \in D$. S'il existe $\ell_a \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n \text{ avec } \|h\| \text{ assez petite, } f(a+h) = f(a) + \ell_a(h) + \mathcal{o}\left(\|h\|\right)$$

alors on dit que f est différentiable en a et ℓ_a est la différentielle de f en a. Si c'est le cas, alors

$$\exists!\, g_a \in \mathbb{R}^n,\ \forall h,\ \ell_a(h) = \langle g_a \mid h \rangle\,.$$

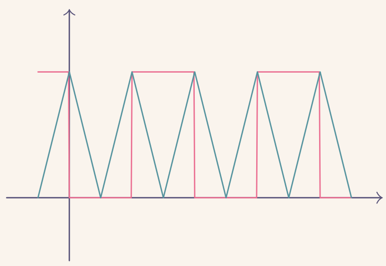
On dit que g_a est le gradient de f au point a.

Donc,

$$f(a+h) - f(a) \simeq \langle g_a \mid h \rangle\,.$$

Les résultats vus au chapitre 22 peuvent se retrouver avec cette nouvelle définition du gradient.

V.3 Séries de Fourier



Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension infinie et $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ une application de E^2 dans $\mathbb{C}$ vérifiant

1. linéarité à gauche ;
2. $\forall (u, v) \in E^2,\ \langle v \mid u \rangle = \overline{\langle u \mid v \rangle}$; (symétrie hermitienne)
3. $\forall u \in E,\ \langle u \mid u \rangle \geqslant 0$;
4. $\forall u \in E,\ \langle u \mid u \rangle = 0 \iff u = 0_E$.

Proposition: $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est semi-linéaire à droite :

$$\langle u \mid \alpha v + \beta w \rangle = \bar{\alpha} \langle u \mid v \rangle + \bar{\beta} \langle u \mid w \rangle\,.$$

$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est donc sesquilinéaire.

$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est dit produit héermitien.

Définition: Soit $\mathscr{B} = (e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une famille de E. On dit que $\mathscr{B}$ est une base hilbertienne si

$$\begin{cases} \forall x \in E,\ \exists!\,(c_n)_{n\in\mathbb{Z}},\ x = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n\,; \\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \|e_n\| = 1\,; \\ \forall p \neq q,\ \langle e_p \mid e_q \rangle = 0. \end{cases}.$$

Dans ce cas, $c_n = \langle x \mid e_n \rangle$.

V.4 Espace-temps de Minkowsky

On modélise l'espace-temps par $E = \mathbb{R}^4$; c'est un espace affine et on y crée un "produit scalaire" (en utilisant une "norme") :

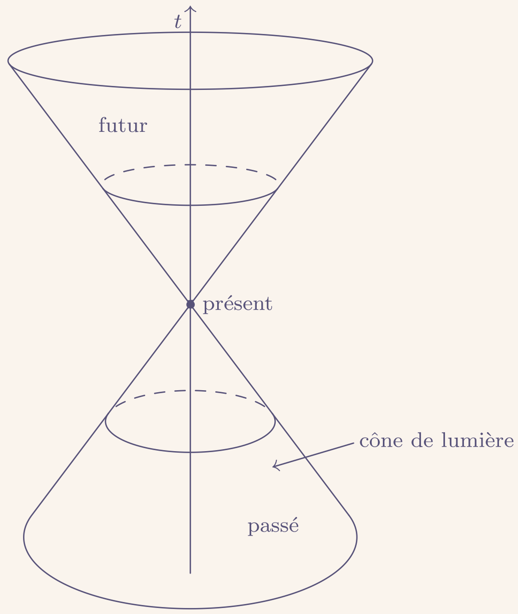
$$q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2.$$

On en déduit que

$$\big\langle (x, y, z, t) \mid (x', y', z', t') \big\rangle = xx' + yy' + zz' - c^2 tt'.$$

Ce "produit scalaire" n'en est pas vraiment un : il est bilinéaire, symétrique MAIS pas positif.

$$(x, y, z, t) \text{ isotrope } \iff x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2.$$



Toute information contenue dans le cône passé nous est accessible ; s'il est sur sa surface, il faut que l'information y voyage à la vitesse de la lumière. Par contre, comme le temps n'est pas symétrique, on ne peut pas voir l'information future.