Chapitre 29

TD

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

Table des matières

Exercice 8

1. On sait déjà que $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   Soient $A, B \in E^2$.

$$\mathrm{tr}({}^tB\,A) = \mathrm{tr}\left({}^t\left({}^tB\,A\right)\right) = \mathrm{tr}\left({}^tA\,{}^t{}^tB\right) = \mathrm{tr}({}^tA\,B).$$

   La transposée est linéaire, la multiplication matricielle est linéaire et la trace est linéaire ; l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tA\,B)$ est linéaire.
   $\mathrm{tr}({}^tA\,A) \geqslant 0$ (c'est une somme de carrés) et $\mathrm{tr}({}^tAA) = 0 \iff A = 0$.

2. Soit $M = (m_{i,j}) \in S_n$.

$$\begin{aligned} d(A,M)^2 &= \|M - A\|^2 \\ &= \operatorname{tr}\left({}^t(M-A)(M-A)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (m_{ji} - a_{ji})^2\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n (m_{ij} - a_{ij})^2\right) \\ &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (m_{ij} - a_{ij})^2 \end{aligned}$$

D'après le cours, on sait que $d(a, S_n)^2 = \|A - p_{S_n}(A)\|^2$.
On pose

$$A_n = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = -M\}.$$

On montre $A_n \subset S_n^\perp$. Soient $M \in A_n$ et $S \in S_n$.

$$\begin{aligned} \langle M \mid S \rangle &= \operatorname{tr}({}^tM\, S) = \operatorname{tr}(-M\, S) = -\operatorname{tr}(MS) \\ \langle S \mid M \rangle &= \operatorname{tr}({}^tS\, M) = \operatorname{tr}(SM) = \operatorname{tr}(MS) \end{aligned}$$

D'où $\langle M \mid S \rangle = 0$.
On sait que $S_n \oplus A_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\dim A_n = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) - \dim S_n$. Comme $\dim S_n < +\infty$,

$$S_n \oplus S_n^\perp = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

donc

$$\begin{aligned} \dim S_n^\perp &= \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) - \dim S_n \\ &= \dim A_n. \end{aligned}$$

Donc $A_n = S_n^\perp$ et donc

$$A - p_{S_n}(A) = \frac{1}{2}\left(A - {}^tA\right)$$

En effet,

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}\left(A + {}^tA\right)}_{\in S_n} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(A - {}^tA\right)}_{\in A_n}.$$

On en déduit que

$$\inf_{M \in S_n} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (m_{ij} - a_{ij})^2 = \frac{1}{4} \sum_{i \leqslant i,j \leqslant n} (a_{ij} - a_{ji})^2.$$

On peut également prouver ce résultat avec les dérivées partielles : soit f telle que

$$f(m_{11}, \ldots, m_{nn}) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (m_{ij} - a_{ij})^2.$$

Soit $i \leqslant j$.

$$\frac{\partial f}{\partial m_{ij}} = 2(m_{ij} - a_{ij}) + 2(m_{ji} - a_{ji}) = 0 \iff m_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}.$$

D'où $M = \dfrac{A + {}^tA}{2}$. On a prouvé que c'est une valeur critique mais pas que c'est un minimum.

Exercice 3

On pose

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \big((x,y),(x',y')\big) &\longmapsto x'(ax+cy) + y'(bx+dy) \\ &\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax+cy \\ bx+dy \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- φ est bilinéaire (multiplication matricielle).
- $$\varphi \text{ symétrique} \iff \forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$
  $$\iff \forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2, cx'y + by'x = cxy' + byx'$$
  $$\iff b = c \text{ avec } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ x' = 0 \\ y' = 1 \end{cases}$$
- On suppose $b = c$.
  $$\begin{aligned} \varphi \text{ positive} &\iff \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ ax^2 + 2bxy + dy^2 \geqslant 0 \\ &\iff \begin{cases} \forall y \in \mathbb{R},\ 4b^2y^2 - 4ady^2 \leqslant 0 \\ a \geqslant 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b^2 - 4ad \leqslant 0 \\ a \geqslant 0 \end{cases} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \varphi \text{ définie positive} &\iff \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \big(ax^2 + 2bxy + dy^2 = 0 \implies x = y = 0\big) \\ &\iff \begin{cases} \forall y \neq 0,\ 4y^2(b^2 - ad) < 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b^2 - ad < 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que φ est un produit scalaire si et seulement si

$$\begin{cases} b = c, \\ b^2 - ad < 0, \\ a > 0. \end{cases}$$

Exercice 7

On montre que p est une projection : on montre $p \circ p = p$ et on calcule donc M^2 :

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 30 & -12 & 6 \\ -12 & 12 & 12 \\ 6 & 12 & 30 \end{pmatrix} \\ &= M \end{aligned}$$

Donc $p \circ p = p$ et donc p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

$$\mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p) = \frac{1}{6}(5+2+5) = 2.$$

Donc, $\begin{aligned}[t] \mathrm{Im}(p) &= \mathrm{Vect}\big(p(e_1), p(e_2)\big) \\ &= \mathrm{Vect}\big((5,-2,1),(-1,1,1)\big). \end{aligned}$

On remarque que $p(e_1 + 2e_2 - e_3) = 0$. D'où $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}(e_1 + 2e_2 - e_3)$.

$$\begin{aligned} \langle e_1 + 2e_2 - e_3 \mid 5e_1 - 2e_2 + e_3 \rangle &= 5 - 4 - 1 = 0 \\ \langle e_1 + 2e_2 - e_3 \mid -e_1 + e_2 + e_3 \rangle &= -1 + 2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

donc $\underbrace{\mathrm{Ker}\, p}_{\dim(\cdot)=1} \subset \underbrace{(\mathrm{Im}\, p)^\perp}_{\dim(\cdot)=3-2=1}$ donc $\mathrm{Ker}\, p = (\mathrm{Im}\, p)^\perp$.

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \mathrm{Im}\, p &\iff (x,y,z) \in (\mathrm{Ker}\, p)^\perp \\ &\iff (x,y,z) \perp (1,2,-1) \\ &\iff x + 2y - z = 0 \end{aligned}$$

Exercice 12

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.

$$\forall i, j,\ \langle f(e_i) \mid f(e_j) \rangle = \langle e_i \mid e_j \rangle = \delta_{i,j}$$

donc $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ est orthonormée, elle est donc libre ; c'est donc une base orthonormée. D'où

$$\begin{aligned} \forall x \in E,\ f(x) &= \sum_{i=1}^{n} \langle f(x) \mid f(e_i) \rangle\, f(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle\, f(e_i). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\forall (x,y)\in E^2, \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ f(\lambda x+\mu y) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \lambda x+\mu y \mid e_i\rangle f(e_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(\lambda \langle x \mid e_i\rangle + \mu \langle x \mid e_i\rangle\big) f(e_i)\\ &= \lambda\sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i\rangle f(e_i) + \mu \sum_{i=1}^{n} \langle y \mid e_i\rangle f(e_i)\\ &= \lambda f(x)+\mu f(y).\end{aligned}$$

Exercice 15

1. Soit $t\in[0,1]$. On a $f(t)=\displaystyle\int_0^t f'(u)\ \mathrm{d}u$. D'où,

$$f^2(t)=\left(\int_0^t f'(u)\ \mathrm{d}u\right)^2 = \langle f' \mid 1\rangle^2.$$

   On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$f^2(t)\leqslant \int_0^t f'(u)^2\ \mathrm{d}u \int_0^t 1^2\ \mathrm{d}u \leqslant t\int_0^1 f'(u)^2\ \mathrm{d}u.$$

   Donc,

$$\int_0^1 f^2(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \left(t\int_0^1 f'(u)^2\ \mathrm{d}u\right)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 f'(u)^2\ \mathrm{d}u \int_0^1 t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2\ \mathrm{d}t.$$

2. On suppose $f(0)=0$ et $f(1)=0$.

$$\begin{aligned}\forall t\in\left[\frac{1}{2},1\right],\ f^2(t) &= \int_t^1 f'(u)\ \mathrm{d}u\\ &\leqslant \int_t^1 f'(u)^2\ \mathrm{d}u \int_t^1 1^2\ \mathrm{d}u\\ &\leqslant \int_0^1 f'(u)^2\ \mathrm{d}u(1-t).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^1 f^2(t)\ \mathrm{d}t &\leqslant \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)\ \mathrm{d}t \int_0^1 f'(u)^2\ \mathrm{d}u\\ &\leqslant \frac{1}{8}\int_0^1 f'(u)^2\ \mathrm{d}u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} f^2(t)\ \mathrm{d}t &\leqslant \int_0^1 f'(u)\ \mathrm{d}u \int_0^{\frac{1}{2}} t\ \mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{1}{8}\int_0^1 f'(u)^2\ \mathrm{d}u\end{aligned}$$

   On en déduit que

$$\int_0^1 f^2(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{4}\int_0^1 f'(t)^2\ \mathrm{d}t.$$

Exercice 11

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

$$\begin{aligned}\forall i \neq j,\ \|f(e_i)\|^2 - \|f(e_j)\|^2 &= \langle f(e_i) + f(e_j) \mid f(e_i) - f(e_j) \rangle \\ &= \langle f(e_i + e_j) \mid f(e_i - e_j) \rangle\end{aligned}$$

Or, $\|e_i\|^2 = \|e_j\|^2 = 1$ et donc $\langle e_i + e_j \mid e_i - e_j \rangle = 0$ et donc $\langle f(e_i + e_j) \mid f(e_i - e_j) \rangle = 0$. D'où

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ \|f(e_i)\| = \|f(e_1)\| =: \lambda.$$

Soit $x \in E$. On pose

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle\, f(e_i)$$

d'où

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle\, f(e_i).$$

D'après le théorème de Pythagore,

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle^2 \|f(e_i)\|^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle^2 .$$

Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée, on a

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle^2 \ \text{ donc } \|f(x)\| = \lambda \|x\|.$$

Exercice 1

- $\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P, Q) \in \mathbb{R}$;
- $$\begin{aligned}\forall P, Q, R \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \varphi(\alpha P + \beta Q, R) &= \sum_{k=0}^{n} \big(\alpha P(k) + \beta Q(k)\big)\, R(k) \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{n} P(k)\, R(k) + \beta \sum_{k=0}^{n} Q(k)\, R(k) \\ &= \alpha \varphi(P, R) + \beta \varphi(Q, R);\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(Q, P) &= \sum_{k=0}^{n} Q(k) P(k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} P(k) Q(k) \\ &= \varphi(P, Q);\end{aligned}$$

— $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P,P) = \sum_{k=0}^{n} P(k)^2 \geqslant 0\,;$

—

$$\begin{aligned}\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P,P) = 0 &\iff \sum_{k=0}^{n} P(k)^2 = 0\\ &\iff \forall k \in [\![0,n]\!]\,,\ P(k) = 0\\ &\iff P = 0 \text{ car } \deg P \leqslant n.\end{aligned}$$

Exercice 2

— $\forall f,g \in E,\ \varphi(f,g) \in \mathbb{R}\,;$

—

$$\begin{aligned}\forall f,g,h \in E\,\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R},\ \varphi(\alpha f,\beta g,h) &= \big(\alpha f(0) + \beta g(0)\big)h(0)\\ &\quad + \int_0^1 \big(\alpha f'(t) + \beta g'(t)\big)\, h'(t)\ \mathrm{d}t\\ &= \cdots\cdots\cdots\\ &= \alpha\varphi(f,h) + \beta\varphi(g,h);\end{aligned}$$

— $\forall f,g \in E,\ \varphi(g,f) = \varphi(f,g)\,;$

— $\forall f \in E,\ \varphi(f,f) = \underbrace{f(0)^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{\int_0^1 f'(t)\ \mathrm{d}t}_{\geqslant 0}\,;$

— Soit $f \in E$.

$$\begin{aligned}\varphi(f,f) = 0 &\iff \begin{cases} f(0)^2 = 0\\ \displaystyle\int_0^1 f'(t)^2\ \mathrm{d}t = 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} f(0) = 0\\ \forall t,\ f'(t) = 0 \text{ car } (f')^2 \text{ est continue positive}\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} f \text{ constante}\\ f(0) = 0\end{cases}\\ &\iff f = 0\end{aligned}$$

Exercice 4

On a $\|u\|^2 = 2$ d'où $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$.

$$\begin{aligned}v - \langle v \mid e_1\rangle\, e_1 &= (1,1,1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\\ &= (0,1,0)\end{aligned}$$

D'où $e_2 = \dfrac{(0,1,0)}{\|(0,1,0)\|} = (0,1,0)$.

$$\begin{aligned} w - \langle w \mid e_1\rangle e_1 - \langle w \mid e_2\rangle e_2 &= (-1,1,0) + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times (1,0,1) - (0,1,0) \\ &= \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

On a $\left\|\left(-\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right)\right\|^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$ d'où

$$e_3 = \frac{(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})}{\|(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})\|} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Exercice 5

<u>Conjecture</u> : $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

- Soit $x \in F^\perp + G^\perp$. Montrons que $x \in (F \cap G)^\perp$. Soit $y \in F \cap G$. On décompose x en $u + v$ avec $u \in F^\perp$ et $g \in G^\perp$.

$$\begin{aligned} \langle x \mid y\rangle &= \langle u + v \mid y\rangle \\ &= \langle u \mid y\rangle + \langle v \mid y\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

  donc $x \perp y$ et donc $x \in (F \cap G)^\perp$.
  On a prouvé
$$F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp.$$
- E est euclidien donc
$$\dim\left((F \cap G)^\perp\right) = \dim E - \dim(F \cap G).$$

$$\dim(F^\perp + G^\perp) = \dim(F^\perp) + \dim(G^\perp) - \dim(F^\perp \cap G^\perp)$$

<u>Conjecture 2</u> : $F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$.

- Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Soit y un élément de $F + G$ que l'on décompose en $u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$.

$$\begin{aligned} \langle x \mid y\rangle &= \langle x \mid u + v\rangle \\ &= \langle x \mid u\rangle + \langle x \mid v\rangle \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Soit $x \in (F + G)^\perp$.
  - $\forall y \in F$, $\langle x \mid y\rangle = 0$;
  - $\forall y \in G$, $\langle x \mid y\rangle = 0$.

Donc, $x \in F^\perp \cap G^\perp$.

Retour au calcul précédent :

$$\begin{aligned}
\dim(F^\perp + G^\perp) &= \dim(F^\perp) + \dim(G^\perp) - \dim(F^\perp \cap G^\perp) \\
&= \dim E - \dim F + \dim E - \dim G - \big(\dim E - \dim(F+G)\big) \\
&= \dim E - \big(\dim F + \dim G - \dim(F+G)\big) \\
&= \dim E - \dim(F+G)
\end{aligned}$$

Exercice 6

1. $F^\perp = \mathrm{Vect}\big(\overbrace{(1,1,1,1)}^{v_1}, \overbrace{(1,-1,1,-1)}^{v_2}\big)$.
   En effet, soit $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.
   $$\begin{aligned}
   u \in F &\iff \begin{cases} x+y+z+t = 0 \\ x-y+z-t = 0 \end{cases} \\
   &\iff \begin{cases} \langle u \mid v_1 \rangle = 0 \\ \langle u \mid v_2 \rangle = 0 \end{cases}
   \end{aligned}$$
   D'où $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)^\perp$.
2. <u>Méthode 1</u> Soit $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On sait que l'on peut décomposer u en $v + w$ avec $v \in F$ et $w \in F^\perp$. On pose $u = (a,b,c,d)$ avec $\begin{cases} a+b+c+d = 0 \\ a-b+c-d = 0. \end{cases}$
   et $w = \alpha v_1 + \beta v_2$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   On calcule les valeurs de $a, b, c, d, \alpha, \beta$ et, on trouve v en fonction de (x,y,z,t) :
   $$(a,b,c,d) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

   <u>Méthode 2</u> On orthonormalise une base de F :
   - on cherche (u_1, u_2) une base de F ;
   - on orthonormalise (u_1, u_2) en (v_1, v_2) ;
   - $\forall u$, $p_F(u) = \langle u \mid v_1 \rangle\, v_1 + \langle u \mid v_2 \rangle\, v_2$.

   <u>Méthode 3</u>
   $$\left.\begin{aligned} x+y+z+t = 0 \\ x-y+z-t = 0 \end{aligned}\right\} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = -t. \end{cases} \quad .$$
   D'où $F = \mathrm{Vect}\big(\underbrace{(-1,0,1,0)}_{u_1}, \underbrace{(0,-1,0,1)}_{u_2}\big)$.
   Donc $\mathscr{C} = (u_1, u_2, v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^4$. On en déduit que
   $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(p_F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   On applique les formules de changement de bases...

3. $d(u, F) = \|u - p_F(u)\|$.

Exercice 9

" $\Longrightarrow$ " C'est du cours.

" $\Longleftarrow$ " par contraposée : soit G un supplémentaire de F tel que $F \neq F^\perp$, et p la projection sur F parallèlement à G.
Soit $u \in F \setminus \{0\}$, $v \in G \setminus \{0\}$ et

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \lambda &\longmapsto \|u + \lambda v\|^2 - \|u\|^2 \\ &= 2\lambda \langle u \mid v \rangle + \lambda^2 \|v\|^2 \qquad = \lambda(2 \langle u \mid v \rangle + \lambda \|v\|^2) \end{aligned}$$

λ	$-\infty$		0		λ_0		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	0	$+$	

ou

λ	$-\infty$		λ_0		0		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\forall \mu \in [0, \lambda_0],\ f(\mu) = \|\underbrace{u + \mu v}_{x}\| - \|\underbrace{u}_{p(x)}\| < 0$$

donc $\|x\| < \|p(x)\|$

Exercice 10

1. Soit $M = (m_{i,j}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
   $\forall i, j$, $m_{i,j}$ est la i-ème coordonnée de $f(e_j)$:

$$\begin{aligned} m_{i,j} &= \langle f(e_j) \mid e_i \rangle \\ &= \langle e_j \mid f(e_i) \rangle \\ &= \langle f(e_i) \mid e_j \rangle \\ &= m_{j,i} \end{aligned}$$

2. Soient $u \in \mathrm{Ker}(f)$ et $v \in \mathrm{Im}(f)$. Soit $w \in E$ tel que $v = f(w)$.

$$
\begin{aligned}
\langle u \mid v\rangle &= \langle u \mid f(w)\rangle \\
&= \langle f(u) \mid w\rangle \\
&= \langle 0 \mid w\rangle \\
&= 0
\end{aligned}
$$

D'où $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)^\perp$.

$$
\begin{aligned}
\dim(\mathrm{Ker}\, f) &= \dim E - \dim(\mathrm{Im}\ f) \\
&= \dim\left((\mathrm{Im}\ f)^\perp\right)
\end{aligned}
$$

On en déduit que $\mathrm{Ker}\, f = (\mathrm{Im}\ f)^\perp$.

Exercice 13

Comme l'exercice 9.

Exercice 14

$G \subset F^\perp$ Soit $f \in F$ et $g \in G$.

$$
\begin{aligned}
\langle g \mid f\rangle &= \int_{-1}^{1} g(t)f(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{0} g(t)f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{0}^{1} g(t)f(t)\ \mathrm{d}x \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$F^\perp \subset G$ Soit $h \in F^\perp$. Montrons que $h \in G$.

$$\forall f \in F \int_{-1}^{1} h(t)f(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

Montrons que

$$\forall t \in [0,1],\ h(t) = 0.$$

$$\exists \eta > 0\, \forall t \in\,]t_0 - \eta, t_0 + \eta[, h(t) > 0$$

Or,

$$\int_{-1}^{1} f(t)h(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

Mais,

$$\int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} f(t)\underbrace{h(t)}_{>0}\ \mathrm{d}t = 0.$$

$\lightning$